

NUMERISCHE MATHEMATIK FÜR DAS LEHRAMT

Hausaufgaben (Besprechung am 7.2.2017)**H 12.1** Weitere Zeitschrittverfahren

Leiten Sie folgende Varianten des Trapezverfahrens her:

- Heun-Verfahren*: Ersetzen Sie y_j im Argument von f durch einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens.
- Mittelpunktverfahren*: Ersetzen Sie die Trapezregel zur Approximation des Integrals durch die Mittelpunkregel (Gauß-Formel für $n = 0$).
- Wann stimmen das Heun-Verfahren und das Mittelpunktverfahren überein?

H 12.2 Anwendung von Zeitschrittverfahren I

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + ty'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

- Transformieren Sie diese Differentialgleichung in ein System erster Ordnung.
- Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ und $y'(1)$ mit dem expliziten Euler-Verfahren und der Schrittweite $h = 1/2$.
- Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ und $y'(1)$ mit dem impliziten Euler-Verfahren und der Schrittweite $h = 1/2$.
- Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ und $y'(1)$ mit dem Trapezverfahren und der Schrittweite $h = 1/2$.
- Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ und $y'(1)$ mit dem Heun-Verfahren und der Schrittweite $h = 1/2$.

Hinweis: Die exakte Lösung ist ungefähr $y(1) \approx 0.881752$.

H 12.3 Anwendung von Zeitschrittverfahren II

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + \frac{2}{1+t}y'(t) - y(t) = t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

- Transformieren Sie diese Differentialgleichung in ein System erster Ordnung.
- Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ und $y'(1)$ mit dem expliziten Euler-Verfahren und der Schrittweite $h = 1$.
- Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ und $y'(1)$ mit dem Trapezverfahren und der Schrittweite $h = 1$.

Hinweis: Die exakte Lösung ist ungefähr $y(1) \approx 2.07742$.