

# Übungsaufgaben Optimierung I

5. Serie

## Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Wie viele

- (a) Seiten
- (b) Facetten
- (c) Ecken

kann  $P(A, b)$  dann maximal haben? Beweisen Sie ihre Antworten!

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polyeder. Zeigen Sie:  $v \in P$  ist eine Ecke von  $P$  genau dann, wenn  $v$  ein Extrempunkt von  $P$  ist, d.h. wenn aus  $p, q \in P$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  und  $v = \lambda p + (1 - \lambda)q$  stets  $p = q = v$  folgt.

*Tipp für "  $\Leftarrow$  ": Wegen  $v \in P$  gilt  $Av \leq b$ . Unterteilen Sie das System in  $\hat{A}v = \hat{b}$  und  $\tilde{A}v < \tilde{b}$ . Beweisen Sie, dass  $\hat{A}y < \hat{b}$ , falls  $\|y - v\|$  hinreichend klein ist. Folgern Sie unter Verwendung der Voraussetzung, dass der affine Unterraum  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{A}x = \hat{b}\}$  die Dimension 0 hat.*

## Aufgabe 3 (6 + 4 + 4 Punkte)

Ein Kraftfahrzeughersteller möchte seine Produktpalette um umweltfreundliche Elektrofahrzeuge erweitern und steht nun vor der Frage, wie er seinen Produktionsplan gestalten soll. Nach einem Umbau kann er in seinem Werk sowohl Elektroautos (EA) als auch gewöhnliche Kleinwagen (KW) produzieren. Selbstverständlich muss er nach wie vor möglichst viel dabei verdienen. Für je 1000 produzierte KW (Einheit (=E) sei 1000) kann er einen Gewinn von 2 Mio € verbuchen und für je 1000 produzierte EA (Einheit (=E) sei 1000) einen Gewinn von 20 Mio €. Durch die Nachfrage am Absatzmarkt sind höchstens 12E KW und 4E EA absetzbar. Der Hersteller hat 3000 Arbeitskräfte in seinem Betrieb angestellt. Für die Produktion von 1E Kleinwagen werden 100 davon gebunden sowie  $\frac{1}{16}$  des Maschinenparks. Für die Produktion von 1E EA sogar 600 Arbeitskräfte und  $\frac{2}{16}$  des Maschinenparks. Für beide Produktionen wird der gleiche Maschinenpark genutzt. Der Hersteller hat ein begrenztes Budget von 84 Mio € für F&E und zur Beschaffung der Produktionsmittel zur Verfügung. Für 1E KW müssen 4 Mio € investiert werden, und für 1E EA 12 Mio. Da der Hersteller Verträge mit den Händlern geschlossen hat, müssen mindestens 3E KW und 2E EA produziert werden. Negative Produktionszahlen sind ausgeschlossen.

- (a) Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem, das der Fahrzeughersteller lösen müsste, um seinen Gewinn zu maximieren (Zielfunktion, Nebenbedingungen, Modell). Dabei dürfen Sie vernachlässigen, dass die produzierten Stückzahlen ganzzahlig sein müssen.
- (b) Ermitteln Sie eine Lösung graphisch und geben Sie den maximalen Gewinn an.
- (c) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus (b) unter Verwendung von Fourier-Motzkin.

Abgabe: Bis Dienstag, 13.05.14, 14:00 Uhr ins Fach "Optimierung I" (WSC)