# Übungsaufgaben Optimierung I

6. Serie

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Stellen Sie den Polyeder

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

in der Form $P^{=}(A, b)$ dar.

## Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\max\{2x_1 + \lambda x_2 : \left.\begin{array}{lll} x_1 + x_2 & \leq & 5, \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 12, \\ x_1 & \leq & 4, \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}\right\}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Stellen Sie die zulässige Menge graphisch dar.
(b) Lösen sie das Optimierungsproblem für $\lambda = 1$ graphisch.
(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Optimierungsproblem unbeschränkt?
(d) Für welche Werte von $\lambda$ gibt es unendlich viele Lösungen? Geben Sie jeweils die optimale Seite des Restriktionspolyeders an.

## Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)

Die Firma Eltro stellt Radios und Fernseher her. Kürzlich hat diese Firma eine neue Art Fernseher entwickelt. Um das neue Produkt bekannt zu machen, hat Eltro beschlossen, ein-minütige TV-Spots in zwei Typen von Sendungen zu kaufen: Comedy-Shows und Fußball-Spiele. Jede Comedy-Werbung wird von 4 Mio. Frauen und 2 Mio. Männern gesehen. Jede Fußball-Werbung wird von 2 Mio. Frauen und 6 Mio. Männern gesehen. Die Kosten für eine Minute Comedy-Werbung betragen €50.000 und eine Minute Fußball-Werbung €100.000. Eltro hätte gern, dass die Spots von mindestens 20 Mio. Frauen und 18 Mio. Männern gesehen werden und möchte möglichst wenig Geld ausgeben.
(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem.
(b) Löse Sie das Problem mit Hilfe von Fourier-Motzkin.

## Aufgabe 4 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Programme $(P1)$ und $(P2)$ zueinander dual sind.

$(P1)$

$$\max\{ \left.\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & : & \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & & \geq & 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & \geq & -3 \\ & & x_3 & +3x_4 & \leq & 2 \\ -5x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & 10 \\ x_1, & x_2, & x_3 & & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

$(P2)$

$$\min\{ \left.\begin{array}{rrrcr} -3y_1 & +2y_2 & +10y_3 & : & \\ -y_1 & & -5y_3 & = & 2 \\ -y_1 & -y_2 & -4y_3 & \leq & -3 \\ & 3y_2 & +y_3 & = & 4 \\ & y_2 & & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

## Aufgabe 5 (8 Punkte)

Beweisen sie das folgende Resultat mit Hilfe des Dualitätssatzes:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gilt entweder
(1) $\exists x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, x \neq 0, Ax = 0$
oder
(2) $\exists y \in \mathbb{R}^m : A^{\mathrm{T}} y > 0$.

## Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $m < n$. Kann dann ein $c \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass die Optimierungsaufgabe $\min\{c^{\mathrm{T}} x \mid x \in P(A,b)\}$ eine *eindeutige* Lösung besitzt? Beweisen Sie ihre Antwort!

## Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Ecken des k-Simplex $S^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{1}^{\mathrm{T}} x = 1, x \geq 0\}$.
(b) Zeichnen Sie $S^1$ und $S^2$.
(c) Bestimmen Sie $\operatorname{argmax}\{c^{\mathrm{T}} x \mid x \in S^k\}$ in Abhängigkeit von $c = (c_1, \ldots, c_k)^{\mathrm{T}}$.

## Aufgabe 8 (4 + 6 Punkte)

Wir nehmen vereinfachend an, dass ein Elfmeterschütze die Wahl hat, in eine der vier Torecken zu schiessen und dass er (trotz der Nervenanspannung) auch stets präzise trifft. Ganz ähnlich kann sich der Torhüter entscheiden, nach oben-links (O/L), oben-rechts (O/R), unten-links (U/L) oder unten-rechts (U/R) zu 'hechten', um den Ball zu halten. Es fällt genau dann ein Tor, wenn beide Aktionen verschieden sind. Ein erzieltes Tor wird dabei als Gewinn des Elfmeterschützen und ein gehaltenen Schuss als Gewinn des Torhüters aufgefasst.
(a) Formulieren Sie die Situation als Matrixspiel.
(b) Bestimmen Sie die optimalen gemischten Strategien für Schütze und Torhüter durch Lösen der korrespondierenden linearen Optimierungsprobleme.

Abgabe: Bis Dienstag, 03.06.14, 14:00 Uhr ins Fach „Optimierung I" (WSC)