

Übungsaufgaben Optimierung I

8. Serie

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Überprüfen Sie mit Hilfe der Komplementaritätsbedingungen, ob $z^* = (0, 2, 0, 7, 0)^T$ eine Optimallösung des folgenden Problems ist:

$$\max\{8z_1 - 9z_2 + 12z_3 + 4z_4 + 11z_5 : \left. \begin{array}{l} 2z_1 - 3z_2 + 4z_3 + z_4 + 3z_5 \leq 1, \\ z_1 + 7z_2 + 3z_3 - 2z_4 + z_5 \leq 1 \\ 5z_1 + 4z_2 - 6z_3 + 2z_4 + 3z_5 \leq 22 \\ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Aufgabe 2 (2 + 8 Punkte)

Das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ sei gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Formen Sie P in einen Polyeder $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^5 : \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$ in Standardform um.
- (b) Bestimmen Sie alle Basismatrizen von \tilde{A} und die zugehörigen Basislösungen. Welche sind zulässig, welche sind entartet?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die konvexe Hülle von $e_1, -e_1, e_2, -e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Beschreiben Sie diese Pyramide als Polytop der Form $P(A, b)$. Welche der Ecken ist unabhängig von der Wahl von A, b immer entartet? Warum ist das der Fall?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Simplexverfahrens, dass das Problem

$$\max\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 : \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_3 \leq 2 \\ x_i \geq 0 \end{array} \right\}$$

unbeschränkt ist.

Aufgabe 5 (6 + 10 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$\max \left\{ \begin{array}{rcccccl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & : & \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & \leq & 0 \\ 4x_1 & -3x_2 & -3x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\ 4x_1 & -4x_2 & & +x_4 & \leq & 3 \\ & & x_3 & -x_4 & \geq & -1 \\ & & & x_4 & \leq & \frac{1}{2} \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Entfernen Sie alle redundanten Ungleichungen. Beweisen Sie, dass die übrigen Ungleichungen nicht redundant sind.
- (b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexverfahrens.