Übungsaufgaben Optimierung I

10. Serie

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 Punkte)

(a) Sei $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar und $u, v \in \mathbb{R}^m$, so dass $1 + v^{\mathrm{T}} C^{-1} u \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann $C + uv^{\mathrm{T}}$ invertierbar ist und

$$(C + uv^{\mathrm{T}})^{-1} = (I_m - \frac{C^{-1} uv^{\mathrm{T}}}{1 + v^{\mathrm{T}} C^{-1} u}) C^{-1}$$

gilt. (Dabei bezeichnet $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix.)

(b) Solange weder Optimalität noch Unbeschränktheit vorliegen, endet jeder Schritt des Simplexverfahrens mit dem Ersetzen der aktuellen Basis B durch $B' := (B \cup \{r\}) \setminus \{s\}$. Sei A_B die zu B gehörige Basismatrix und bezeichne A^i die i-te Spalte von A. Zeigen Sie, dass dann $A_{B'} = A_B + (A^r - A^s) e_s^{\mathrm{T}}$ und $1 + e_s^{\mathrm{T}} A_B^{-1} (A^r - A^s) \neq 0$. ($e_s \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet dabei den s-ten Einheitsvektor.)

(c) Sei w_B der durch $A_B w_B = A^r$ eindeutig bestimmte Vektor. Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass

$$A_{B'}^{-1} = A_B^{-1} - \frac{(w_B - e_s) e_s^{\mathrm{T}} A_B^{-1}}{e_s^{\mathrm{T}} w_B}$$

gilt. Wie kann man diese Formel im Zusammenhang mit dem Simplexverfahren nutzen?

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 Punkte)

Betrachten Sie das Problem $\min\{c^{\mathrm{T}} x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Beweisen oder wiederlegen Sie:

(a) Eine Variable, die beim Simplexalgorithmus gerade in die Basis eingetreten ist, kann die Basis beim nächsten Schritt wieder verlassen.

(b) Sind die vorzeichenbeschränkten Variablen x_j, x_{j+1} aus einer ursprünglich nicht vorzeichenbeschränkten Varaible $y = x_j - x_{j+1}$ entstanden, so kann in jedem Simplexschritt höchstens eine der Variabeln x_j, x_{j+1} eine Basisvariable sein.

(c) Ist A symmetrisch, ist jede zulässige Lösung von $\min\{c^{\mathrm{T}} x \mid Ax = c\}$ optimal.

Zusatzaufgabe, wird in den Übungen am 8. und 10. Juli besprochen

Sei $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Betrachten Sie das Problem $\max\{x_n \mid x \in P\}$ mit

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 + \epsilon x_{i-1} \leq x_i \leq 1 - \epsilon x_{i-1},\ i = 2, \ldots, n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in P$ die Ungleichungen

$$\frac{\epsilon^j - 1}{1 - \epsilon} \leq x_j \leq \frac{1 - \epsilon^j}{1 - \epsilon},\ j = 1, \ldots, n$$

erfüllt sind.

(b) Für $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^{\mathrm{T}} \in \{-1,1\}^n$ sei $B_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \epsilon & \sigma_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \epsilon & \sigma_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \epsilon & \sigma_n \end{bmatrix}$.

Zeigen Sie, dass B_σ regulär ist.

(c) Zeigen Sie: Ist v eine Ecke von P, so existiert ein $\sigma \in \{-1,1\}^n$ mit $v = B_\sigma^{-1} 1_n$. (Dabei bezeichnet $1_n \in \mathbb{R}^n$ den Vektor mit 1 in jeder Komponente.)

(d) Für $\sigma \in \{-1,1\}^n$ sei $(v_1(\sigma), \ldots, v_n(\sigma))^{\mathrm{T}} = v(\sigma) := B_\sigma^{-1} 1_n$ und $R_\sigma = (r_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $r_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{für } j \geq i+1 \\ (-\epsilon)^{i-j} \sigma_j \cdot \ldots \cdot \sigma_i & \text{für } j \leq i \end{cases}$ gegeben.

Zeigen Sie: $R_\sigma = B_\sigma^{-1}$ und $v_j(\sigma) = \sum_{i=0}^{j-1} (-\epsilon)^i (\prod_{l=0}^{i} \sigma_{j-l})$.

(e) Zeigen Sie: Für jedes $\sigma \in \{-1,1\}^n$ ist $v(\sigma) \in P$ und erfüllt genau die zu B_σ gehörenden Restriktionen mit Gleichheit. (D.h. $v(\sigma)$ ist eine Ecke von P und der zugehörige Basisvektor ist nicht entartet.)

(f) Zeigen Sie: $\mathrm{conv}\{v(\sigma_1), v(\sigma_2)\}$ ist genau dann eine Kante von P, wenn sich σ_1 und σ_2 in exakt einer Komponente unterscheiden. Wie viele Ecken/Kanten hat P folglich?

(g) Für $\sigma \in \{-1,1\}^n$ sei $\kappa_i(\sigma) := (-1)^i \prod_{l=0}^{i} \sigma_{n-l}$ und $q(\sigma) := (\kappa_0(\sigma), \ldots, \kappa_{n-1}(\sigma))^{\mathrm{T}}$. Zeigen Sie: Für beliebiges $\tau \in \{-1,1\}^n \setminus \{\sigma\}$ gilt $v_n(\sigma) \neq v_n(\tau)$ und $v_n(\sigma) < v_n(\tau)$ genau dann, wenn $q(\sigma)$ lexikographisch kleiner ist als $q(\tau)$.

(h) Es seien $\sigma, \tau \in \{-1,1\}^n$ so, dass $q(\sigma) <_l q(\tau)$ und kein $\alpha \in \{-1,1\}^n$ mit $q(\sigma) <_l q(\alpha) <_l q(\tau)$ existiert. (Dabei ist $<_l$ die lexikographische Ordnung.) Sei k der Index der ersten Komponente, in der sich $q(\sigma)$ und $q(\tau)$ unterscheiden. Zeigen Sie, dass dann τ durch Wechsel des Vorzeichens der $(n-k)$-ten Komponente aus σ entsteht und $n-k$ der minimale Index l ist, für den eine Veränderung der l-ten Komponente von σ in einer Ecke mit besserem Zielfunktionswert resultiert.

(i) Wie viele Schritte benötigt das Simplexverfahren also bei ungünstiger Wahl der zu tauschenden Basis-/Nichtbasisvariablen für die Lösung der obigen Aufgabe? Wie verhält sich dieser Wert zur Größe der Eingangsdaten?

Abgabe: Bis Dienstag 15.07.2014, 14:00 Uhr ins Fach „Optimierung I" (WSC)