Bachelorarbeit

Konstruktion Abelscher Funktionen mit Hilfe von Thetareihen

Nils Plewe

Datum der Abgabe:
15.8.2016

Betreuung: Prof. Dr. Daniel Greb

Fakultät für Mathematik

Universität Duisburg-Essen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Konstruktion und insbesondere der Existenz abelscher Funktionen zu komplexen Gittern, d.h.

Definition 1.1. *Seien A,B komplexe $n \times n$ Matrizen. Falls die Spalten von A und B $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind, nennen wir die Menge*

$$L(A,B) := \{\omega \in \mathbb{C}^n | \omega = A\alpha + B\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n\}$$

(das von A und B aufgespannte) ***Gitter****.*

Definition 1.2. *Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n$ und $L \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gitter. Wir nennen f* ***abelsche Funktion zum Gitter L****, falls $f(z+\omega) = f(z)$ für alle $\omega \in L$ und alle $z \in \mathbb{C}^n$, in denen f holomorph ist, gilt.*

Wir werden mit einem eindimensionalem Gitter anfangen, und dort zumindest eine Richtung des abelschen Theorems beweisen, welches insbesondere besagt, dass es zu jedem Gitter eine nicht-konstante abelsche Funktion gibt. Der Beweis verläuft konstruktiv. Wir werden die sogenannte Thetareihe definieren, zeigen, dass diese konvergiert, und dann die gewünschte abelsche Funktion als Quotient von Thetareihen erhalten.
Im nächsten Kapitel betrachten wir dann den mehrdimensionalen Fall. Wir werden feststellen, dass auf speziellen Gittern ein Analogon zur eindimensionalen Thetareihe existiert und mit Hilfe von diesem eine nicht-konstante abelsche Funktion als Quotient von Thetareihen konstruieren. Im Anschluss daran werden wir versuchen, andere Gitter auf diesen Fall zurück zu führen.
Dadurch werden wir in der Lage sein, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1.3. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $L \subseteq V$ ein Gitter. Falls eine nicht-ausgeartete Riemann'sche Form zum Gitter L existiert, existiert auch eine nicht-konstante abelsche Funktion zum Gitter L.*

2 Das Abelsche Theorem

Zunächst fragen wir uns, wann man im eindimensionalem Fall eine Abelsche Funktion zum Gitter $L(\omega_1, \omega_2)$ zu vorgegebenen Null- und Polstellen finden kann. Darüber setzen wir einige Dinge als bekannt voraus:

- Die Null- und Polstellen müssen diskret sein. Das heißt, sie sind auf der kompakten Menge $M := \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\}$ endlich.
- Nach dem dritten Liouville'schen Satz [F1, Seite 262] gibt es genau so viele Null- wie Polstellen.

Noch etwas zur Notation: Wir sagen "Die Funktion f hat zum Gitter L Nullstellen in $a_1, \dots, a_n$"wenn gilt: Für alle $z \in \mathbb{C}$ hat f in z eine Nullstelle der Ordnung $\#\{i \in \{1, \dots, n\} | a_i \equiv z \text{ mod L}\}$

Satz 2.1 (Das Abelsche Theorem[F1]). *Eine Abelsche Funktion zum Gitter $L \subseteq \mathbb{C}$ und vorgegebenen Null- und Polstellen $a_1, \dots, a_n$ bzw. $b_1, \dots, b_1$ existiert genau dann, wenn die abelsche Relation erfüllt ist, d.h.*

$$a_1 + \cdots + a_n \equiv b_1 + \cdots + b_n \; mod \; L$$

Den Beweis, dass jede Abelsche Funktion dieses Null- und Polstellenverhalten hat lasse ich an dieser Stelle aus. Dieser lässt sich im höherdimensionalem nämlich nicht reproduzieren. Finden kann man ihn im Buch [F1, Seite 299]. Für den Beweis der anderen Richtung beschränken wir uns zunächst auf Gitter der Form $L = L(1, \tau)$, mit $Im(\tau) > 0$. Auf einem solchen versuchen wir, explizit eine Abelsche Funktion als Quotient von Thetafunktionen zu konstruieren.

Definition 2.2. *Sei Θ holomorph auf $\mathbb{C}$. Wir nennen Θ eine* ***Thetafunktion*** *zum Gitter $L(1, \tau)$ wenn gilt:*

1. $\Theta(z + \alpha) = \Theta(z)$
2. $\Theta(z + \tau\beta) = e^{-2\pi i(z\beta + \frac{1}{2}\tau\beta^2)}\Theta(z)$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Definition 2.3. *Sei τ eine komplexe Zahl mit echt positivem Imaginärteil. Wir definieren die* ***Thetareihe****:*

$$\phi_\tau(z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau + 2gz)}$$

Satz 2.4. *Die Thetareihe $\phi_\tau(z)$ konvergiert als Funktion von z bei festem τ normal in ganz $\mathbb{C}$ und stellt somit eine holomorphe Funktion in $\mathbb{C}$ dar.*

Erinnerung: Seien $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ holomorphe Funktionen in $\mathbb{C}$. Wir sagen, die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konvergiert normal, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} sup_{z\in K}|f_i(z)|$ konvergiert. In diesem Fall ist die Funktion $g(z) := \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ wohldefiniert und holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ [F1, Seite 100].

Beweis. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Sei $z = x + iy$ und $\tau = u + iw$. Wir wollen nun für jeden Summanden der Thetareihe eine obere Schranke auf K finden, sodass die Reihe über die oberen Schranken konvergiert. Für jeden der Summanden gilt:

$$|e^{\pi i(g^2\tau+2gz)}| = e^{Re(\pi i(g^2\tau+2gz))} = e^{-\pi(g^2w+2gy)}$$

Da K als kompakte Menge beschränkt ist, ist y beschränkt. Außerdem ist w positiv. Somit gilt für alle bis auf endlich viele $g \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{g^2w}{2} + 2gy \geq 0 \\
&\Leftrightarrow g^2w + 2gy \geq \frac{1}{2}g^2w \\
&\Leftrightarrow -\pi(g^2w + 2gy) \leq -\pi\frac{1}{2}g^2w
\end{aligned}$$

Da endlich viele Summanden die Konvergenz nicht beeinflussen, können wir $\sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(g^2w)}$ als Majorante von $\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} |e^{\pi i(g^2\tau+2gz)}|$ betrachten. Für diese erhalten wir:

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{-\pi g^2 w} = 1 + 2\sum_{g=1}^{\infty} e^{-\pi w g^2} = 1 + 2\sum_{g=1}^{\infty} q^{(g^2)} \qquad q := e^{-\pi w}$$

Da $w > 0$ ist $q < 1$, und somit konvergiert es als Teilreihe der Geometrischen Reihe. □

Lemma 2.5. *Die Thetareihe ist eine Thetafunktion.*

Beweis. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\phi_\tau(z+\alpha) &= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2g(z+\alpha))} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz+2g\alpha)} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz)+2\pi i\alpha} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz)} e^{2\pi i\alpha} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz)} = \phi_\tau(z).
\end{aligned}$$

Da $\beta \in \mathbb{Z}$ ist, ändert sich die Summe nicht, wenn wir statt über g über $g - \beta$ summieren.

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\phi_\tau(z+\tau\beta) &= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz+2g\tau\beta)} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i((g-\beta)^2\tau+2(g-\beta)z+2(g-\beta)\tau\beta)} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau-2g\beta\tau+\beta^2\tau+2gz-2\beta z+2g\tau\beta-2\beta^2\tau)} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz-2\beta z-\beta^2\tau)} \\
&= e^{-2\pi i(\beta z+\frac{1}{2}\beta^2\tau)} \sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(g^2\tau+2gz)} \\
&= e^{-2\pi i(\beta z+\frac{1}{2}\beta^2\tau)} \phi_\tau(z).
\end{aligned}$$

□

Für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir nun die Funktion

$$f_a(z) := \frac{\prod_{j=1}^n \phi_\tau(z+a-a_j)}{\prod_{j=1}^n \phi_\tau(z+a-b_j)}$$

wobei die a_j und die b_j die abelsche Relation für das Gitter $L := L(1,\tau)$ erfüllen, und so gewählt sind, dass sogar

$$a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$$

gilt. Dies ist immer möglich. Denn, angenommen es würde $a_1 + \cdots + a_n - b_1 - \cdots - b_n = \omega$ für $\omega \in L$ gelten. Ersetzen wir a_1 durch $a_1 - \omega$, dann ist die Gleichheit erfüllt, und das dadurch beschriebene Null- und Polstellenverhalten verändert sich nicht. In diesem Fall ist f_a eine abelsche Funktion zum Gitter L, denn es gilt, nach dem soeben berechneten Transformationsverhalten, für alle $\omega = \alpha + \tau\beta \in L$:

$$\begin{aligned}
f_a(z+\alpha+\beta\tau) = \frac{1}{1} f_a(z+\beta\tau) &= \frac{\prod_{j=1}^n \phi_\tau(z+\beta\tau+a-a_j)}{\prod_{j=1}^n \phi_\tau(z+\beta\tau+a-b_j)} f_a(z) \\
&= \frac{\prod_{j=1}^n e^{-2\pi i(z\beta+\frac{1}{2}\tau\beta^2+(a-a_j)\beta)}}{\prod_{j=1}^n e^{-2\pi i(z\beta+\frac{1}{2}\tau\beta^2+(a-b_j)\beta)}} f_a(z) \\
&= \frac{\prod_{j=1}^n e^{2\pi i a_j\beta}}{\prod_{j=1}^n e^{2\pi i b_j\beta}} f_a(z) \\
&= e^{2\pi i\beta\sum_{j=1}^n (a_j-b_j)} f_a(z) = f_a(z)
\end{aligned}$$

Wir müssen jetzt nun noch a so wählen, dass f_a das gewünschte Null- und Polstellenverhalten aufweist. Dazu betrachten wir das Nullstellenverhalten von ϕ_τ und behaupten:

Lemma 2.6. *ϕ_τ hat eine Nullstelle erster Ordnung in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und alle anderen Nullstellen sind zu dieser kongruent.*

Wenn wir das geschafft haben, können wir $a = z_0$ wählen, und sind fertig.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass ϕ_τ auf einem Fundamentalparallelotop $F_c{:=}c+\{\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2|\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\}$ genau eine Nullstelle erster Ordnung hat, da aus dem Transformationsverhalten bereits folgt, dass alle anderen Nullstellen zu dieser kongruent sind. Da ϕ_τ holomorph ist, wissen wir bereits, dass die Nullstellenmenge diskret ist, wir können c also so wählen, dass keine der Nullstellen auf dem Rand von F_c liegt. Nun betrachten wir das Null- und Polstellenzählende Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_c}\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}dz$$

und zeigen, dass dieser Ausdruck 1 ergibt. Dazu unterteilen wir ∂F_c in die vier Strecken [c,c+1],[c+1,c+1+τ],[c+1+τ,c+τ] und [c+τ,c]. Da $\phi_\tau(z+1)=\phi_\tau(z)$ ist, heben sich die Integrale über [c+1,c+1+τ] und [c+τ, c] gegenseitig weg. Für das Integral über [c+1+τ,c+τ] gilt:

$$\int\limits_{c+1+\tau}^{c+\tau}\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}dz=-\int\limits_{c+\tau}^{c+1+\tau}\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}dz=-\int\limits_{c}^{c+1}\frac{\phi_\tau'(z+\tau)}{\phi_\tau(z+\tau)}dz.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_c}\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}^{c+1}\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}-\frac{\phi_\tau'(z+\tau)}{\phi_\tau(z+\tau)}dz.$$

Wir werden sogar zeigen, dass $\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}-\frac{\phi_\tau'(z+\tau)}{\phi_\tau(z+\tau)}$ konstant den Wert $2\pi i$ annimmt. Wir wissen bereits, dass $\phi_\tau(z+\tau)=\phi_\tau(z)e^{-2\pi i(\frac{1}{2}\tau+z)}$ ist. Somit folgt mit der Ketten- und der Produktregel:

$$\phi_\tau'(z+\tau)=(z+\tau)'\phi_\tau'(z+\tau)=(\phi_\tau(z+\tau))'=\phi_\tau'(z)e^{-2\pi i(\frac{1}{2}\tau+z)}+\phi_\tau(z)e^{-2\pi i(\frac{1}{2}\tau+z)}(-2\pi i).$$

Fügen wir jetzt alle diese Ausdrücke zusammen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}-\frac{\phi_\tau'(z+\tau)}{\phi_\tau(z+\tau)}\\&=\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}-\frac{e^{-2\pi i(\frac{1}{2}\tau+z)}(\phi_\tau'(z)+(-2\pi i\phi_\tau(z)))}{e^{-2\pi i(\frac{1}{2}\tau+z)}\phi_\tau(z)}\\&=\frac{\phi_\tau'(z)}{\phi_\tau(z)}-\frac{\phi_\tau'(z)+(-2\pi i\phi_\tau(z))}{\phi_\tau(z)}\\&=-\frac{-2\pi i\phi_\tau(z)}{\phi_\tau(z)}=2\pi i\end{aligned}$$

□

Damit haben wir das Abelsche Theorem zumindest für Gitter der Form $L(1,\tau)$ für ein

τ mit positivem Imaginärteil bewiesen.
Sei $L := L(\omega_1, \omega_2)$ nun ein beliebiges Gitter und $a_1, \ldots, a_n$ sowie $b_1, \ldots, b_n$ so gegeben, dass $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ gilt. Wir definieren $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ falls $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ positiven Imaginärteil hat, ansonsten sei $\tau := -\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Wir haben bereits gezeigt, dass nun eine abelsche Funktion f zum Gitter $L(1, \tau)$, welche die Null- und Polstellen $\frac{a_1}{\omega_2}, \ldots, \frac{a_n}{\omega_2}$ und $\frac{b_1}{\omega_2}, \ldots, \frac{b_n}{\omega_2}$ hat, existiert. Die Funktion $\tilde{f}(z) := f(\omega_2 z)$ ist somit die Funktion, die wir suchen.
Hiermit ist der Beweis der Abelschen Theorems abgeschlossen. Insbesondere können wir nun für ein beliebiges Gitter $L(\omega_1, \omega_2)$ eine doppelte Nullstelle in null und eine doppelte Polstelle in $\frac{\omega_1}{2}$ fordern, und haben damit die Existenz nicht-konstanter abelscher Funktionen auf beliebigen eindimensionalen Gittern gezeigt.

3 Die mehrdimensionale Thetareihe

3.1 Lineare Algebra

Wenn wir den höherdimensionalen Fall untersuchen möchten, benötigen wir einige Resultate aus der linearen Algebra, welche ich im Folgenden zitieren werde. Die Beweise lassen sich im Buch [LA, Kapitel 5] finden.

Definition 3.1. *Sei A eine Matrix. Wir definieren $(A)_{ij}$ als den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A.*

Definition 3.2. *Sei A eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$. Wir sagen, **A ist positiv definit**, wenn $v^t Av > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt.*

Definition 3.3. *Sei A eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$. Wir sagen:*

- *A ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow (A)_{ij} = (A)_{ji}$.*
- *A ist **schiefsymmetrisch** $\Leftrightarrow (A)_{ij} = -(A)_{ji}$.*
- *A ist **hermitesch** $\Leftrightarrow (A)_{ij} = \overline{(A)}_{ji}$.*

Im folgenden sei V immer ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B := (v_1, \ldots, v_n)$ und W ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $C := (w_1, \ldots, w_n)$.

Definition 3.4. *Sei $f : W \times W \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist eine **Bilinearform**, falls f(x,y) linear in x bei festem y und linear in y bei festem x ist.*

Definition 3.5. *Sei f eine Bilinearform. Wir sagen:*

- *f ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow f(z, w) = f(w, z)$.*
- *f ist **alternierend** $\Leftrightarrow f(z, w) = -f(w, z)$.*
- *f ist **positiv definit** $\Leftrightarrow f(z, z) > 0 \ \forall z \in W - \{0\}$*

Definition 3.6. *Sei $f : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist eine **hermitesche Form**, wenn gilt $f(z, w)$ ist $\mathbb{C}$-linear in z bei festem w und $f(z, w) = \overline{f(w, z)}$.*

Definition 3.7. *Sei f eine Bilinearform. Wir definieren die Matrix f_C mit $(f_C)_{ij} := f(w_i, w_j)$ als die **darstellende Matrix von f** bezüglich der Basis C.*

Definition 3.8. *Sei f eine hermitesche Form. Wir definieren die Matrix f_B mit $(f_B)_{ij} := f(v_i, v_j)$ als die **darstellende Matrix von f** bezüglich der Basis B.*

Definition 3.9. *Sei R ein K-Vektorraum mit Basis $D := (r_1, \dots, r_n)$. Dann lässt sich jedes $r \in R$ eindeutig darstellen als $r = \lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_n r_n$. Wir definieren*

$$\phi_D : R \to K^n$$

$$r = \lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_n r_n \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

*Wir nennen $r_D := \phi_D(r)$ den **Vektor r dargestellt bezüglich D**.*

Satz 3.10. *Sei f eine Bilinearform, dann gilt $f(z,w) = z_C^t f_C w_C \ \forall (z,w) \in W \times W$.*
Sei f eine hermitesche Form, dann gilt $f(z,w) = z_B^t f_B \overline{w_B} \ \forall (z,w) \in V \times V$ und f_B ist hermitesch.

Satz 3.11. *Sei f eine Bilinearform, dann gilt*

- *f ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ f_B ist symmetrisch.*
- *f ist alternierend $\Leftrightarrow$ f_B ist schiefsymmetrisch.*
- *f ist positiv definit $\Leftrightarrow$ f_B ist positiv definit.*

Satz 3.12. *Sei A eine positiv definite Matrix, dann sind die Spalten von A linear unabhängig.*

3.2 Das Gitter L(T,Z)

Wir wollen nun die Existenz nicht-konstanter abelscher Funktionen im mehrdimensionalem Fall untersuchen und werden dazu, zunächst auf speziellen Gittern explizit eine solche konstruieren. Bei dem Beweis des Abelschen Theorems haben wir zuerst Gitter der Form $L(1,\tau)$ mit $Im(\tau) > 0$ betrachtet, eine Verallgemeinerung dazu sind Gitter der Form $L(T,Z) := \{\omega \in \mathbb{C}^n | \omega = T\alpha + Z\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n\}$, wobei T eine Diagonalmatrix mit ganzzahligen, von null verschiedenen Einträgen und Z eine symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil ist. Dazu müssen wir erst einmal beweisen, dass $L(T,Z)$ überhaupt ein Gitter ist.

Satz 3.13. *Sei T eine Diagonalmatrix mit ganzzahligen, von null verschiedenen Einträgen und Z eine symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil, dann ist L(T,Z) ein Gitter.*

Beweis. Seien $t_1, \dots, t_n$ und $z_1, \dots, z_n$ die Spalten von T bzw. Z. Wir müssen zeigen, dass diese $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Seien dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n + \lambda_{n+1} z_1 + \dots + \lambda_{2n} z_n = 0.$$

Da insbesondere der Imaginärteil dieses Ausdrucks null sein muss, die Imaginärteile der t_i bereits null ist und die Imaginärteile der z_i wegen der positiven Definitheit linear unabhängig sind, folgt direkt $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0$. Da die Spalten der Diagonalmatrix auch linear unabhängig sind, folgt daraus, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Die Spalten sind also linear unabhängig und spannen somit ein Gitter auf. □

Wir werden nun Verallgemeinerungen der Definitionen aus dem Beweis des Abelschen Theorems angeben, und die selben Resultate auf ähnliche Art und Weise herleiten. Wir verwenden die Schreibweise $Z[w] := w^t Z w$.

Definition 3.14. *Sei Θ holomorph auf $\mathbb{C}^n$. Wir nennen Θ eine **Thetafunktion zum Gitter L(T,Z)**, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ gilt:*

1. $\Theta(z + T\alpha) = \Theta(z)$
2. $\Theta(z + Z\beta) = e^{-2\pi i(z^t\beta + \frac{1}{2}Z[\beta])}\Theta(z)$

Lemma 3.15. *Seien Θ_1, Θ_2 Thetafunktionen zum Gitter L(T,Z), wobei Θ_2 nicht konstant null ist. Dann ist $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ eine abelsche Funktion zum Gitter L(T,Z).*

Beweis. Offensichtlich ist $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ meromorph auf ganz $\mathbb{C}^n$. Jedes $\omega \in L(T, Z)$ lässt sich schreiben als $\omega = T\alpha + Z\beta$ für bestimmte $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. Also gilt:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2}(z+\omega) = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}(z + Z\beta + T\alpha) = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}(z + Z\beta) = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}(z)\frac{e^{-2\pi i[z^t\beta + \frac{1}{2}Z[\beta]]}}{e^{-2\pi i[z^t\beta + \frac{1}{2}Z[\beta]]}} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}(z).$$

□

Definition 3.16. *Sei Z eine symmetrische komplexe $n \times n$ Matrix mit positiv definitem Imaginärteil und sei $a \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir definieren die **Thetareihe**:*

$$\phi_Z[a](z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a] + 2(g+a)^t z\}}$$

Im Fall $n = 1$, $a = 0$ und $Z = \tau$ entspricht diese Definition der alten. Die Abhängigkeit von a brauchen wir später, um zwei Thetafunktionen zu konstruieren, welche keine Vielfachen voneinander sind. Im eindimensionalem Fall haben wir dazu das Argument verschoben, und $\phi_\tau(z + z_0 - a)$ betrachtet. Jetzt verschieben wir aber das Gitter, sodass wir Thetafunktionen zu verschiedenen Obergittern, also Obermengen die selbst Gitter sind, von $L(T, Z)$ erhalten, welche sich aber immer noch in $L(T, Z)$ schneiden. Zunächst müssen wir, wie im eindimensionalem Fall, zeigen, dass die Thetareihe normal konvergiert und eine Thetafunktion ist.

Lemma 3.17. *Zu jeder positiv definiten reellen Matrix Y existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$Y[g] \geq \delta g^t g \ \forall g \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. Da beide Seiten der Ungleichung quadratisch von der Norm von g abhängen, genügt es die Aussage für Elemente auf der Einheitssphäre zu zeigen. Diese ist aber kompakt und somit nimmt $Y[g]$ auf ihr sein Minimum an. Dieses ist echt größer als 0, da Y positiv definit ist. □

Satz 3.18. *[F2, Seite 404] Die Thetareihe $\phi_Z[a](z)$ konvergiert als Funktion von z bei festem a,Z normal in ganz $\mathbb{C}^n$ und stellt somit eine holomorphe Funktion in $\mathbb{C}^n$ dar.*

Beweis. Sei $K \subseteq \mathbb{C}^n$ eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ und $z = x+iy$. Wir wollen nun für jeden Summanden der Thetareihe eine obere Schranke auf K finden, sodass die Reihe über die oberen Schranken konvergiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&|e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t(x+iy)\}}| = e^{Re(\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t z\})} \\
&= e^{-Im(\pi\{Z[g+a]+2(g+a)^t z\})} = e^{-\pi\{Im(Z)[g+a]+2(g+a)^t y\}} \\
&\leq e^{-\pi\{\delta(g+a)^t(g+a)+2(g+a)^t y\}} = e^{-\pi\sum_{i=1}^{n}\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\pi\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}}
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Reihe

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{g_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}}$$

Jeder Summand aus dieser Reihe ist das Produkt aus n Faktoren der Form $e^{-\pi\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}}$, wobei die g_i beliebige ganze Zahlen sind. Man kann sie also als Einträge eines beliebigen Vektors aus $\mathbb{Z}^n$ betrachten. Somit gilt:

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{g_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}} = \sum_{g\in\mathbb{Z}^n}\prod_{i=1}^{n} e^{-\pi\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}}.$$

Ein endliches Produkt aus Reihen konvergiert bereits, wenn jeder Faktor konvergiert. Es genügt also, die Konvergenz von $\sum_{g_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\{\delta(g_i+a_i)^t(g_i+a_i)+2(g_i+a_i)^t y_i\}}$ zu zeigen, wobei wir den Index i weg lassen. Wir haben das Problem dadurch auf ein eindimensionales reduziert, und können jetzt genau so argumentieren wie vorher.

Betrachten wir dazu zunächst die Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&-\pi(\delta(g+a)^2+2(g+a)y) \leq -\pi\frac{1}{2}\delta g^2 \\
&\Leftrightarrow \delta(g+a)^2+2(g+a)y \geq \frac{1}{2}\delta g^2 \\
&\Leftrightarrow \delta g^2+2\delta ga+a^2+2(g+a)y \geq \frac{1}{2}\delta g^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta g^2 \geq -(2\delta ga+a^2+2(g+a)y)
\end{aligned}$$

Da δ und a fest sind und y aus einer kompakten und somit insbesondere beschränkten Menge kommt, ist diese Ungleichung für alle bis auf endlich viele g erfüllt. Diese endlich vielen haben auf die Konvergenz keinen Einfluss, wir können also

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\frac{1}{2}\delta g^2} = 1+2\sum_{g=1}^{n} e^{-\pi\frac{1}{2}\delta g^2} = 1+2\sum_{g=1}^{n} q^{(g^2)} \qquad q := e^{-\pi\frac{1}{2}\delta}$$

als Majorante von $\sum_{g\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\{\delta(g+a)^t(g+a)+2(g+a)^t y\}}$ auffassen. Da $\delta > 0$ ist, ist $q < 1$. Die Reihe ist also eine Teilreihe der geometrischen Reihe, und konvergiert somit. □

Es bleibt das Transformationsverhalten nachzurechnen, auch hier sind die Rechnungen sehr ähnlich zu denen im eindimensionalem Fall waren.

Lemma 3.19. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. Es gelten die Transformationsformeln:*

1. $\phi_Z[a](z+\alpha) = e^{2\pi i a^t\alpha}\phi_Z[a](z)$,
2. $\phi_Z[a](z+Z\beta) = e^{-2\pi i(z^t\beta+\frac{1}{2}Z[\beta])}\phi(z)$

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. Das Einsetzen in die Definition ergibt:

$$\begin{aligned}
\phi_Z[a](z+\alpha) &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t(z+\alpha)\}} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t z+2(g+a)^t\alpha\}} \\
&= e^{2\pi i a^t\alpha}\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\,\overbrace{g^t\alpha}^{\in\mathbb{Z}}} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t z+a\}} \\
&= e^{2\pi i a^t\alpha}\phi_Z[a](z)
\end{aligned}$$

und

$$\phi_Z[a](z+Z\beta) = \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t(z+Z\beta)\}}$$

Da $\beta \in \mathbb{Z}^n$ ist, ändert sich die Summe nicht, wenn wir statt über g über $g-\beta$ summieren.

Dadurch, und weil Z symmetrisch ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t(z+Z\beta)\}} &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g-\beta+a]+2(g-\beta+a)^t(z+Z\beta)\}} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]-2\beta^t Z(g+a)+Z[\beta]+2(g+a)^t z+2(g+a)^t Z\beta-2\beta^t z-2Z[\beta]\}} \\
&= \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t z-2\beta^t z-Z[\beta]\}} \\
&= e^{-2\pi i\{\beta^t z+\frac{1}{2}Z[\beta]\}} \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\{Z[g+a]+2(g+a)^t z\}} \\
&= e^{-2\pi i\{\beta^t z+\frac{1}{2}Z[\beta]\}} \phi_Z[a](z)
\end{aligned}$$

□

Für $a = 0$ ist es also sogar eine Thetafunktion zum Gitter $L(E, Z)$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Das ist eine Obermenge von $L(T, Z)$, zu diesem ist es deswegen auch eine Thetafunktion.

Korollar 3.20. *Sei $r \in \mathbb{C}^n$ mit $r^t \cdot T \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $\phi_Z[r](z)$ eine Thetafunktion zum Gitter L(T,Z).*

Beweis. Diese Aussage folgt sofort aus den Transformationsformeln. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_Z[r](z + T\alpha) &= e^{2\pi i \overbrace{r^t T\alpha}^{\in\mathbb{Z}}} \phi_Z[a](z) = \phi_Z[r](z) \text{ und} \\
\phi_Z[r](z + Z\beta) &= e^{-2\pi i(z^t\beta+\frac{1}{2}Z[\beta])}\phi(z)
\end{aligned}$$

□

Die nächsten beiden Sätze zeigen, dass wir damit die Existenz von nicht-konstanten abelschen Funktionen auf Gittern der Form $L(T, Z)$ gezeigt haben.

Satz 3.21. *Sei T eine Diagonalmatrix mit ganzzahligen Einträgen t_i. Sei t_j ein Eintrag mit $|t_j| \neq 1$ und sei Z eine symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil. Dann existiert eine nicht-konstante abelsche Funktion zum Gitter L(T,Z).*

Beweis. Definiere $r := 1/|t_j| \cdot e_j$, ein Vektor mit Eintrag $1/|t_j| \neq 1$ an der j-ten Stelle. Dann ist $r^t \cdot T = e_j \in \mathbb{Z}^n$. Die Funktionen $\phi_Z[r](z)$ und $\phi_Z[0](z)$ sind also Thetafunktionen zum Gitter $L(T, Z)$. Wir müssen nur noch zeigen, dass sie keine Vielfachen voneinander sind, denn dann ist ihr Quotient eine nicht-konstante abelsche Funktion. Angenommen $\phi_Z[r](z)$ wäre ein Vielfaches von $\phi_Z[0](z)$. Dann wäre $\phi_Z[r](z)$ auch eine Thetafunktion zum Gitter $L(E, Z)$, es würde also gelten

$$\phi_Z[r](z + \alpha) = \phi_Z[r](z) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

Wir haben aber gerade bewiesen, dass

$$\phi_Z[r](z+\alpha) = e^{2\pi i r^t \alpha} \phi_Z[r](z)$$

und für $\alpha = e_j$ ist $e^{2\pi i r^t \alpha} = e^{2\pi i / t_j} \neq 1$. Ein Widerspruch. □

Dass einer der Einträge aus T ungleich 1 ist muss aber nicht unbedingt gefordert werden.

Satz 3.22. *Sei T eine Diagonalmatrix mit ganzzahlingen Einträgen und sei Z eine symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil. Dann existiert eine nicht-konstante abelsche Funktion zum Gitter L(T,Z).*

Beweis. Wir betrachten zunächst das Gitter $L(2T, 2Z)$. Auf diesem existiert nach dem vorherigen Satz eine nicht-konstante abelsche Funktion $f(z)$ zum Gitter $L(2T, 2Z)$. Dann gilt für die Funktion $g(z) := f(2z)$:

$$g(z + T\alpha + Z\beta) = f(2z + 2T\alpha + 2Z\beta) = f(2z) = g(z) \ \forall T\alpha + Z\beta \in L(T, Z).$$

g ist also eine nicht-konstante abelsche Funktion zum Gitter $L(T, Z)$. □

Damit haben wir gezeigt, dass auf Gittern der Form $L(T, Z)$ immer nicht-konstante abelsche Funktionen existieren.

4 Kanonische Gitterbasen

Im eindimensionalem Fall haben wir an dieser Stelle vom speziellen Fall sehr einfach auf den allgemeinen Fall schließen können, indem wir $\mathbb{C}$ als eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefasst haben, und dann ω_2 oder $-\omega_2$ als Basis gewählt haben. Das Gitter, ausgedrückt unter dieser Basis wurde dann von den Vektoren 1 und $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ aufgespannt, und wir waren wieder im einfachen Fall, den wir bereits behandelt hatten. Im höherdimensionalem Fall haben wir das Problem, dass, wenn wir bestimmte Vektoren aus der Gitterbasis als Basis von $\mathbb{C}^n$ benutzen, diese Vektoren dann zwar die Rolle der Matrix T übernehmen, die anderen aber nicht die unbedingt die Rolle von Z, dass heißt sie bilden keine symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil. Tatsächlich ist es für manche Gitter gar nicht möglich, eine solche Basis zu finden. Beispielsweise ist es für das Gitter, welches von den Vektoren $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-3} & \sqrt{-7} \\ 0 & 1 & \sqrt{-5} & \sqrt{-11} \end{bmatrix}$ aufgespannt wird möglich zu zeigen, dass überhaupt keine nicht-konstanten abelschen Funktionen existieren. In diesem Abschnitt werden wir zumindest eine hinreichende Bedingung beweisen, unter der eine solche Basis existiert, und diese auch konstruieren.

Diese Bedingung ist die Existenz einer bestimmten, positiv definiten hermiteschen Form, welche wir Riemann'sche Form nennen werden. Dazu benötigen wir etwas Wissen zum alternierenden Anteil einer solchen Form. Sei im folgenden V immer ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 4.1. *Sei H eine hermitesche Form. Wir nennen $A(z,w) := ImH(z,w)$ den **alternierenden Anteil** von H.*

Lemma 4.2. *Der alternierende Anteil A einer hermiteschen Form H ist eine alternierende $\mathbb{R}$-Bilinearform.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} &A(\lambda z + w, x) = ImH(\lambda z + w, x) = Im(\lambda H(z,x) + H(w,x)) \\ &= \lambda ImH(z,x) + Im(w,x) = \lambda A(z,x) + A(w,x). \end{aligned}$$

Da $\lambda = \overline{\lambda}$ zeigt die gleiche Rechnung auch $A(x, \lambda z + w) = \lambda A(x,z) + A(x,w)$. Dass A alternierend ist folgt daraus, dass H hermitesch ist, es gilt nämlich:

$$A(z,w) = ImH(z,w) = Im\overline{H(w,z)} = -A(w,z).$$

□

Lemma 4.3. *Es gilt $H(z,w) = A(iz,w) + iA(z,w)$ und $A(iz,w) = A(iw,z)$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} A(iz, w) + iA(z, w) &= ImH(iz, w) + iImH(z, w) \\ &= ImiH(z, w) + iImH(z, w) \\ &= ReH(z, w) + iImH(z, w) = H(z, w). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A(iz, w) &= H(z, w) - iA(z, w) = H(z, w) - iImH(z, w) \\ &= ReH(z, w) = Re\overline{H(w, z)} = ReH(w, z) \\ &= H(w, z) - iImH(w, z) = A(iw, z). \end{aligned}$$

□

Definition 4.4. *Sei $L \subseteq V$ ein Gitter und sei H eine hermitesche Form. Wir nennen H eine* ***nicht-ausgeartete Riemann'sche Form****, falls gilt:*

- *H ist positiv definit, das heißt $H(z, z) > 0$ $\forall z \in V - \{0\}$.*
- *der alternierende Anteil A von H nimmt auf $L \times L$ nur ganze Zahlen an.*

Wir wollen nun zeigen, dass es für Gitter, die eine nicht-ausgeartete Riemann'sche Form zulassen, immer eine Basis des dazugehörigen Vektorraums gibt, sodass das Gitter, ausgedrückt unter dieser Basis die Form $L(T, Z)$ hat, und es dementsprechend auch nicht-konstante abelsche Funktionen zu diesem Gitter gibt. Dazu müssen wir definieren, was Gitter und abelsche Funktionen auf beliebigen Vektorräumen sind, die Definitionen sind aber ganz analog:

Definition 4.5. *Sei B eine Basis von V. Wir nennen $L \subseteq V$ ein* ***Gitter****, falls L dargestellt bezüglich der Basis B, also $\phi_B(L)$, ein Gitter in $\mathbb{C}^n$ ist.*
Wir nennen eine meromorphe Funktion f eine ***abelsche Funktion*** *zum Gitter L, falls $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $\omega \in L$ und alle $z \in V$, in denen f holomorph ist, gilt.*

Ein Wechsel der Basis entspricht einer Verkettung mit einer invertierbaren, $\mathbb{C}$-linearen Abbildung. Diese sind biholomorph und ändern $\mathbb{R}$-lineare Unabhängigkeit nicht. Somit hängen diese Definitionen nicht von der Wahl der Basis ab.
Bevor wir uns an das Konstruieren der Basis machen, brauchen wir noch ein kleines Lemma.

Lemma 4.6. *[F2, Seite 389] Sei H eine positiv semidefinite hermitesche Form, d.h. $H(z, z) \geq 0$ $\forall z \in V$. Für einen Vektor $z_0 \in V$ sind folgende drei Eigenschaften äquivalent:*

1) $H(z_0, z_0) = 0$,

2) $H(z_0, z) = 0 \ \forall z \in V$,

3) $A(z_0, z) = 0 \ \forall z \in V$.

Beweis. Wir schließen mit 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1)$\Rightarrow$2): Sei $t \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq H(z + tz_0, z + tz_0) &= H(z, z) + \underbrace{H(tz_0, tz_0)}_{=0} + H(z, tz_0) + H(tz_0, z) \\ &= H(z, z) + H(z, tz_0) + \overline{H(z, tz_0)} = H(z, z) + 2Re(tH(z_0, z)). \end{aligned}$$

Wäre $H(z_0, z) \neq 0$ könnte man t so wählen, dass $H(z, z) + 2Re(tH(z_0, z)) < 0$ wird.

2)$\Rightarrow$3): Folgt sofort aus $A(z_o, z) = ImH(z_0, z)$.

3)$\Rightarrow$1): $H(z_0, z_0) = A(iz_0, z_0) + \underbrace{iA(z_0, z_0)}_{=0} = -A(z_0, iz_0) = 0.$

□

Falls $A(z_0, z) = 0 \ \forall z \in V$ nur für $z_0 = 0$ gilt, nennen wir A **nicht-ausgeartet**. Wir konstruieren zunächst eine Basis des Gitters, die wir im Anschluss für die Basis von V verwenden werden.

Definition 4.7. *Sei T eine Diagonalmatrix mit ganzzahligen, von null verschiedenen Einträgen $t_1, \ldots, t_n$. Wir nennen T **Elementarteilermatrix**, falls gilt, t_s teilt t_{s+1} für alle $1 \leq s < n$.*

Satz 4.8. *[F2, Seite 394] Sei L ein Gitter und sei*

$$A : L \times L \to \mathbb{Z}, \quad m = 2n$$

eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform über $\mathbb{Z}$ d.h.
a) A(a+b,c)=A(a,c)+A(b,c),
b) $A(a, b) = -A(b, a)$,
c) A(a,x)=0 $\forall x \in L \Rightarrow a = 0$.
Dann existiert eine $\mathbb{Z}$-Basis $B = (\omega_1, \ldots, w_{2n})$ von L mit

$$A(\omega_i, \omega_j) = \begin{bmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{bmatrix}_{i,j} \ \forall\ 1 \leq i, j \leq n$$

wobei T eine Elementarteilermatrix ist.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach m durch, wobei der Fall $m = 1$ mit dem Beweis des allgemeinen Falls auch bewiesen wird. Für $m > 0$ zerlegen wir unser Gitter in

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus L',$$

wobei gelten soll

1) $A(\omega_i, \omega_j) = \begin{bmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{bmatrix}_{i,j}$ für i, j$\in \{1, 2\}$,

2) Die Einschränkung von A auf L' ist nicht ausgeartet und es gilt

$$A(\omega_i, z) = 0 \qquad \forall z \in L',$$

3) t_1 teilt $A(x, y)$ für alle $x, y \in L'$.

Wenn wir das schaffen, können wir auf L' die Induktionsannahme anwenden und erhalten eine Zerlegung

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_{2n} \qquad .$$

Ordnen wir die ω_i in der Reihenfolge $\omega_1, \omega_3, \ldots \omega_{2n-1}, \omega_2, \omega_4 \ldots \omega_{2n}$ hat die darstellende Matrix von A bezüglich dieser Basis die gewünschte Form, es gilt nämlich:

$$A(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} t_k & \text{falls } \omega_i = 2k, w_j = 2k+1 \text{ für ein } 1 \leq k < n \\ -t_k & \text{falls } \omega_j = 2k, w_i = 2k+1 \text{ für ein } 1 \leq k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da A nach $\mathbb{Z}$ abbildet und nicht konstant null ist, können wir zwei Vektoren ω_1, ω_2 so wählen, dass $t_1 := A(\omega_1, \omega_2) = -A(\omega_2, \omega_1)$ echt größer als null und unter dieser Bedingung minimal ist. Wir definieren

$$L' := \{x \in L | A(\omega_1, x) = A(\omega_2, x) = 0\}$$

$L', \omega_1\mathbb{Z}, \omega_2\mathbb{Z}$ schneiden sich paarweise nur in der null, ihre direkte Summe ist also wohldefiniert. Betrachten wir nun die Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_1, \varphi_2 \ : L \to \mathbb{Z}$$

mit $\varphi_1(x) := A(\omega_1, x)$ und $\varphi_2(x) := A(\omega_2, x)$. Ihre Bilder sind Untergruppen von $\mathbb{Z}$ und somit zyklisch [Bo, Seite 21]. Da t_1 nach Konstruktion das vom Betrag her kleinste Element der Bilder ist, ist es ihr Erzeuger. Alle Elemente sind also ganzzahlige Vielfache von t_1. Somit sind $\frac{A(\omega_1,x)}{t_1}$ und $\frac{A(\omega_2,x)}{t_2}$ ganze Zahlen. Für ein beliebiges $x \in L$ betrachten wir

$$x' := x - \frac{A(\omega_2, x)}{t_1}\omega_1 - \frac{A(\omega_1, x)}{t_1}\omega_2.$$

x' liegt in L', denn

$$A(\omega_1, x') = A(\omega_1, x) - \frac{A(\omega_2, x)}{t_1} \underbrace{A(\omega_1, \omega_1)}_{=0} - \frac{A(\omega_1, x)}{t_1} \underbrace{A(\omega_1, \omega_2)}_{=t_1} = 0.$$

$A(\omega_2, x') = 0$ folgt analog.
Das heißt, für jedes $x \in L$ existieren ganze Zahlen $z_1(= \frac{A(\omega_2,x)}{t_1})$, z_2 mit $x = x' + z_1\omega_1 + z_2\omega_2$. Das bedeutet, dass gilt

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus L'$$

Wir müssen nun noch die Bedingungen 1), 2) und 3) nachprüfen:
1) Folgt nach Definition von t_1 und der Tatsache, dass A alternierend ist, und deswegen $A(\omega_i, \omega_i) = 0$ und $A(\omega_1, \omega_2) = -A(\omega_2, \omega_1)$ gilt.
2)$A(\omega_i, z) = 0 \ \forall z \in L'$ gilt nach Definition von L'. Gäbe es ein $x \in L' - \{0\}$ mit $A(x, z') = 0 \ \forall z' \in L'$, dann würde für jedes beliebige $z = z' + z_1\omega_1 + z_2\omega_2 \in L$ gelten :

$$A(x, z' + z_1\omega_1 + z_2\omega_2) = A(x, z') + A(x, z_1\omega_1) + A(x, z_2\omega_2) = 0$$

A wäre also auf L ausgeartet, was es nach Voraussetzung nicht ist.
3) Angenommen es gäbe $x, y \in L'$, sodass $A(x, y)$ nicht von t_1 geteilt werden würde. Dann gäbe es ein $m \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $0 < r < t_1$ mit $A(x, y) = mt_1 + r$. Dann gilt aber

$$A(-m\omega_1 + x, \omega_2 + y) = A(-m\omega_1, \omega_2) + 0 + 0 + A(x, y) = -mt_1 + A(x, y) = r < 1,$$

im Widerspruch zur Minimalität von t_1. □

Aus dieser Basis wollen wir jetzt eine Basis von V konstruieren. Dazu benötigen wir noch folgendes Lemma.

Lemma 4.9. *Sei Z eine symmetrische reelle invertierbare Matrix. Z ist genau dann positiv definit, wenn Z^{-1} positiv definit ist.*

Beweis. Wir fügen eine Einheitsmatrix ein. Dadurch erhalten wir:

$$g^t Z g = g^t Z Z^{-1} Z g = (Zg)^t Z^{-1} (Zg) \ \forall g \in V.$$

Da Z invertierbar ist, durchläuft Zg ganz V, wenn g dies tut, und damit ist $g^t Z g$ genau dann für alle g größer als null, wenn $g^t Z^{-1} g$ diese Eigenschaft hat. □

Damit haben wir alle Resultate gesammelt, die wir benötigen, um unsere letzte Aussage zu beweisen.

Satz 4.10. *[F2, Seite 396] Zu jeder nicht ausgearteten Riemann'schen Form H auf einem Gitter $L \subset V$ existieren eine Basis B, eine Elementarteilermatrix T und eine symmetrische, komplexe Matrix Z mit positiv definitem Imaginärteil, sodass $\phi_B(L) = L(T, Z)$ und $H_B = (ImZ)^{-1}$ gilt, wobei H_B die darstellende Matrix von H bezüglich B ist.*

Beweis. Wir wählen eine Gitterbasis $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ bezüglich derer die Darstellungsmatrix von $A = Im(H)$ die Form $\begin{bmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{bmatrix}$ hat. Wir behaupten:
Die Vektoren $\omega_1 \ldots, \omega_n$ bilden eine $\mathbb{C}$-Basis von V.
Da $dim(V) = n$ ist, genügt es die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zu zeigen. Seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_k = x_k - iy_k$ und $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \omega_\nu = 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \omega_\nu = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \omega_\nu - i y_\nu \omega_\nu = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \omega_\nu}_{:=z} = i \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \omega_\nu}_{:=w} \\
&\Leftrightarrow z = iw \\
&\Leftrightarrow iz = -w.
\end{aligned}
$$

Da $\omega_1, \ldots, \omega_n$ und somit auch $i\omega_1, \ldots, i\omega_n$ nach Voraussetzung $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind, folgt aus $z = 0$ bereits $x_\nu = 0$ und aus $iw = 0$ bereits $y_\nu = 0$ für alle $\nu \in \{1 \ldots n\}$. Betrachten wir nun

$$H(z, z) = A(iz, z) = A(-w, z) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} x_\nu i y_\eta A(-\omega_\nu, \omega_\eta).$$

Nach Wahl der Basis ist $A(-\omega_\nu, \omega_\eta) = 0$ für alle $\nu, \eta \in \{1, \ldots, n\}$. Da H nicht ausgeartet ist, folgt aus $H(z, z) = 0$, dass $z = 0$ sein muss, was zu zeigen war. Die Vektoren $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sind somit eine Basis von V, und mit ihnen auch $B := (t_1^{-1}\omega_1, \ldots, t_n^{-1}\omega_n)$, wobei die t_i die Diagonaleinträge der Elementarteilermatrix T sind. Seien $v_1, \ldots, v_{2n} \in \mathbb{C}^n$ die Vektoren $\omega_1 \ldots \omega_{2n} \in V$ dargestellt bezüglich B, d.h. $v_i = \phi_B(\omega_i)$.

Direkt nach Konstruktion gilt $(v_1, \ldots, v_n) = \begin{bmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{bmatrix} = T.$

Es bleibt zu zeigen, dass:
a) $Z := (v_{n+1}, \ldots, v_{2n})$ eine symmetrische Matrix mit positiv definitem Imaginärteil ist, und dass
b) $(ImZ)^{-1}$ die Darstellungmatrix von H bezüglich B ist, d.h. $H(t_\eta \omega_\eta, t_\nu \omega_\nu) = (ImZ^{-1})_{\eta\nu}$.
Über A wissen wir:

1) $A(\omega_\eta, \omega_\nu) = A(\omega_{n+\eta}, \omega_{n+\nu}) = 0, A(\omega_{n+\eta}, \omega_\nu) = \delta_{\eta\nu} t_\eta \qquad \forall \eta, \nu \in \{1, \dots n\}$
2) $A(z, w) = Im(H(z, w))$
3) $A(iz, w) = A(iw, z)$
4) $H(z, w) = A(iz, w) + iA(z, w)$
Die Matrix Z ist genau so definiert, dass gilt:

$$\omega_{n+\eta} = \sum_{\nu=1}^{n} Z_{\nu\eta} t_\nu^{-1} \omega_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} Re(Z_{\nu\eta}) t_\nu^{-1} \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} Im(Z_{\nu\eta}) t_\nu^{-1} i\omega_\nu.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{\eta k} t_k &\overset{1)}{=} A(\omega_{n+\eta}, \omega_k) = \sum_{\nu=1}^{n} Re(Z_{\nu\eta}) t_\nu^{-1} \underbrace{A(\omega_\nu, \omega_k)}_{=0} + \sum_{\nu=1}^{n} Im(Z_{\nu\eta}) t_\nu^{-1} A(i\omega_\nu, \omega_k) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} Im(Z_{\nu\eta}) t_\nu^{-1} A(i\omega_\nu, \omega_k) \\ \Leftrightarrow \delta_{\nu k} &= \sum_{\nu=1}^{n} Im(Z_{\nu\eta}) t_\nu^{-1} t_k^{-1} A(i\omega_\nu, \omega_k) = \sum_{\nu=1}^{n} Im(Z_{\nu\eta}) A(it_\nu^{-1}\omega_\nu, t_k^{-1}\omega_k). \end{aligned}$$

Letzteres ist der Eintrag an der Stelle (ν, k) der Matrix $(ImZ)^t R$ mit $R_{ij} = A(it_\nu^{-1}\omega_\nu, t_k^{-1}\omega_k)$. Da außerdem nach 1) $iA(t_\nu^{-1}\omega_\nu, t_k^{-1}\omega_k) = 0$ ist, folgt aus 4), dass $R = (ImZ^t)^{-1}$ die Darstellungsmatrix von H ist. Weil alle ihre Einträge Funktionswerte von A sind, ist R eine reelle Matrix. Als Darstellungsmatrix von H ist sie zusätzlich noch hermitesch und positiv definit. Zudem sind reelle, hermitesche Matrizen symmetrisch. Deswegen ist $R = (Im(Z)^t)^{-1} = (Im(Z)^{-1})^t = (ImZ)^{-1}$. Da eine invertierbare Matrix symmetrisch ist, wenn ihre inverse symmetrisch ist, ist auch $Im(Z)$ symmetrisch.
Damit ist b) gezeigt, und für a) muss nur noch gezeigt werden, dass $Re(Z)$ symmetrisch ist. Da die v_{n+i} die Darstellungen der ω_{n+i} sind und außerdem auch die Spalten der Matrix Z, folgt aus unserem Wissen über darstellende Matrizen für hermitesche Formen:

$$H(\omega_{n+i}, \omega_{n+j}) = v_{n+i}^t (ImZ)^{-1} \overline{v}_{n+j} = (Z^t (ImZ)^{-1} \overline{Z})_{ij}$$

und somit

$$0 \overset{1)}{=} A(\omega_{n+i}, \omega_{n+j}) \overset{2)}{=} Im(H(\omega_{n+i}, \omega_{n+j})) = Im(Z^t (ImZ)^{-1} \overline{Z})_{ij}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= Im[Z^t(ImZ)^{-1}\overline{Z}] \\
&= Im[(Re(Z)^t + iIm(Z)^t)(ImZ)^{-1}(ReZ - iImZ)] \\
&= Im[((ReZ)^t + i(ImZ)^t)((ImZ)^{-1}ReZ - iE)] \\
&= Im[(ReZ)^t(ImZ)^{-1}ReZ - i(ReZ)^t + iReZ + (ImZ)^t] \\
&= ReZ - (ReZ)^t + Im[(ReZ)^t(ImZ)^{-1}ReZ + (ImZ)^t] \\
&= ReZ - (ReZ)^t \\
\Rightarrow & ReZ = (ReZ)^t
\end{aligned}$$

□

Damit können wir jetzt sehr einfach den Satz beweisen, den wir in der Einleitung schon erwähnt hatten:

Satz 4.11. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $L \subseteq V$ ein Gitter. Falls eine nicht-ausgeartete Riemann'sche Form zum Gitter L existiert, existiert auch eine nicht-konstante abelsche Funktion zum Gitter L.*

Beweis. In Kapitel 4 haben wir gezeigt, dass wir eine Basis von V finden, sodass L von der Form $L(T, Z)$. In Kapitel 3 haben wir bewiesen, dass es zu Gittern dieser Form immer nicht-konstante abelsche Funktionen gibt. □

Dies bestätigt nochmal unsere eindimensionalen Überlegungen, denn dort gibt es immer eine nicht-ausgeartete Riemann'sche Form. Bei Gittern der Form $L(1, \tau)$ mit $Im(\tau) > 0$ ist diese gegeben durch $H(z, w) := z\frac{1}{Im(\tau)}\overline{w}$ (dies entspricht der Darstellungsmatrix $Im(Z)^{-1}$ im höherdimensionalem). Dass H eine positiv definite hermitesche Form ist, ist klar, da die "Darstellungsmatrix"$Im(\tau)$ positiv definit ist. Wir müssen also noch überprüfen, dass der alternierende Anteil $A := Im(H)$ ganz auf dem Gitter $L(1, \tau)$ ist. Seien dazu $a + b\tau, c + d\tau \in L(1, \tau),\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebig und $\tau = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A(a + b\tau, c + d\tau) &= Im(H(a + b\tau, c + d\tau)) \\
&= Im[(a + b\tau)\frac{1}{Im(\tau)}\overline{(c + d\tau)}] \\
&= \underbrace{Im[\frac{a}{Im(\tau)}]}_{=0} + Im[\frac{b\tau}{Im(\tau)}] + \underbrace{Im[\frac{c}{Im(\tau)}]}_{=0} + Im[\frac{\overline{d\tau}}{Im(\tau)}] \\
&= bIm[\frac{x + iy}{y}] + dIm[\frac{x - iy}{y}] \\
&= b - d \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Hieraus geht ebenfalls hervor, dass die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Basis $(1, \tau)$

von der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist, wie sie in **Satz 4.8** konstruiert wurde. Für allgemeine Gitter haben wir gezeigt, dass man diese sehr einfach, durch einen Basiswechsel, auf die Form $L(1, \tau)$ bringen kann, sodass diese Riemann'sche Form sich auch auf solche übertragen lässt.

5 Ausblick

Man kann die Forderung an das Gitter noch etwas abschwächen, indem man die Forderung, dass die Riemann'sche Form ausgeartet ist auslässt, und stattdessen nur positive Semidefinitheit fordert, d.h. es soll gelten $H(z, z) \geq 0$ statt $H(z, z) > 0$ für alle $z \in V - \{0\}$, wobei H nicht die Nullform ist. Es ist sogar möglich hier eine Äquivalenz zu zeigen, dass heißt, dass die Existenz einer nicht-konstanten abelschen Funktion auch die Existenz einer, von der Nullform verschiedenen, positiv semidefiniten Riemann'schen Form impliziert. Einen Beweis hierzu findet man im Buch "Funktionentheorie 2"[F2, Kapitel VI] von Eberhard Freitag.

Literatur

[F1] Freitag, Eberhard; Busam, Rolf (2006): Funktionentheorie 1. Auflage 4, Springer Berlin Heidelberg New York

[FHFCM] Fritzsche, Klaus; Grauert, Hans (2002): From Holomorphic Functions to Complex Manifolds. Springer New York Berlin Heidelberg

[Bo] Bosch, Siegfried (2013): Algebra. Auflage 8, Springer Berlin Heidelberg

[F2] Freitag, Eberhard (2014): Funktionentheorie 2, Auflage 2, Springer Berlin Heidelberg

[LA] Fischer, Gerd (2014): Lineare Algebra. Auflage 6, Springer Fachmedien Wiesbaden

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe, mich auch keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift