SEMINAR ÜBER LIE-ALGEBREN
SOSE 2015

PROF. DR. DANIEL GREB

1. Einleitung

Eine *Lie-Algebra* ist ein Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

mit $[x, x] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die sogenannte *Jacobi-Identität*

$$[x, [y, z] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt. Im Seminar werden wir zusätzlich annehmen, dass $\mathfrak{g}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist.

Lie-Algebren tauchen in den unterschiedlichsten Bereichen der Mathematik auf, sie sind eine Methode, den Begriff der "Symmetrie" z.B. eines Differentialgleichungssystems, einer Mannigfaltigkeit oder eines physikalischen Systems zu formulieren.

Das erste und zugleich auch wichtigste Beispiel einer Lie-Algebra ist $\mathfrak{gl}_n$: der zugrundeliegende Vektorraum ist der n^2-dimensionale Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in den komplexen Zahlen, die Lie-Klammer ist durch

$$[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

definiert. Matrizen, deren Spur null ist, ergeben eine Unteralgebra, die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n$, eines der wichtigsten Beispiele einer *halbeinfachen* Lie-Algebra.

Im Seminar werden wir sehen, dass man jede endlich-dimensionale Lie-Algebra in einen halbeinfachen Teil und einen *auflösbaren* Teil zerlegen kann. Auflösbare Lie-Algebren sind nach den kommutativen Lie-Algebren (also solchen, bei denen die Lie-Klammer identisch 0 ist) die einfachsten Lie-Algebren, und wir werden Kriterien kennenlernen, mit denen man testen kann, ob eine gegebene Lie-Algebra auflösbar ist. Anschließend wenden wir uns der Strukturtheorie halbeinfacher Lie-Algebren zu, die man nach einiger Arbeit durch kombinatorische und elementargeometrische Objekte, sogenannte Wurzelsysteme, klassifizieren kann. Bei all diesen Überlegungen spielt Darstellungstheorie eine große Rolle: dies ist das Studium von Homomorphismen einer gegebenen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{gl}_n$. Konsequenterweise ist das technische Haupthilfsmittel die Lineare Algebra.

2. Studientechnisches

2.1. **Teilnahmemodalitäten.** Zur erfolgreichen Teilnahme am Seminar gehören die regelmäßige Teilnahme an den Vorträgen, sowie das Vorbereiten und Halten eines Vortrages. Zur Vorbereitung des Vortages gehören zwei Beratungsgespräche: eines am Beginn Ihrer Vorbereitung, in dem wir das Thema genau eingrenzen und die Literatur diskutieren, und ein weiteres kurz vor Ihrem Vortrag, in dem Sie mir Ihr Konzept kurz vorstellen. Natürlich stehe ich darüberhinaus gerne für Fragen zur Verfügung. Hilfestellungen und Hinweise zum Halten eines Seminarvortrages werden auf der Website des Seminars bereitgestellt werden.

2.2. **Voraussetzungen.** Lineare Algebra I + II

3. Vorträge

Im Prinzip folgen wir [EW], eine sehr ähnliche Darstellung kann man in Soergels Skript [S] finden. Das Buch von Humphreys [H] ist ein Standardwerk mit vielen Hintergrundinformationen und Ergänzungen, in das man auf jeden Fall mal hereinschauen sollte.

1. Vortrag, 14.4.: Grundlegende Definitionen und Beispiele (D. Greb). Vorlage: [EW, S. 1-7], [H, 2.3]

Definition: Lie-Algebra, Motivation, Unteralgebren und Ideale, Homomorphismen, Derivationen, Automorphismen, Motivation: Lie-Gruppen,

1.1 Diskussion, 21.4.: Was macht einen guten Seminarvortrag aus ?

2. Vortrag, 28.4.: Mehr Beispiele und Konstruktionen mit Idealen (R. Elgersma). Vorlagen: [H, 1.2], [EW, S. 11-14, 20-24]

Hier sollten die klassischen Lie-Algebren vorgestellt werden und gezeigt werden, dass die spezielle orthogonale Lie algebra isomorph zu $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt ist. Desweiteren sollen Standard-Konstruktionen sowie niedrig-dimensionale Lie-Algebren vorgestellt werden.

3. Vortrag, 12.5.: Auflösbare Algebren und Unteralgebren von gl(V) (A. Schmidt). Vorlage: [EW, S. 27-43]

Auflösbare und nilpotente Algebren sind nach abelschen Lie-Algebren die einfachsten Lie Algebren. Ziel des Vortrages ist die Einführung der entsprechenden Begriffe und die Diskussion von Beispielen. Außerdem soll ein Ausblick auf die Klassifikation halbeinfacher Lie-Algebren gegeben werden, die sich am anderen Ende des Spektrums zu auflösbaren Lie-Algebren befinden.

Hier sollen Unteralgebren der Endomorphismenalgebra eines Vektorraumes diskutiert werden, und mit Hilfe von Linearer Algebra studiert werden.

4. Vortrag, 19.5.: Die Sätze von Lie und Engel (T. Kirschner). Vorlage: [EW, S. 45-52]

Dies sind die zwei wichtigsten Struktursätze über nicht-halbeinfache Lie-Algebren. Der Satz von Engel ist ein nützliches Kriterium dafür, dass eine Lie-Algebra nilpotent ist. Der Satz von Lie sagt, dass einfache Darstellungen von auflösbaren Lie-Algebren eindimensional sind.

5. Vortrag, 2.6.: Darstellungstheorie (D. Klein). Vorlage: [EW, S. 53-66]

Eine Möglichkeit, abstrakte Lie-Algebren zu studieren, ist es, Homomorphismen in die Endomorphismenalgebra eines Vektorraumes zu betrachten, die sogenannten Darstellungen. Diese sollen in diesen Vortrag eingeführt werden. Hauptresultat ist Schur's Lemma, das etwas über die elementaren Bausteine der Theorie, die sogenannten irreduziblen Darstellungen, aussagt.

6. Vortrag, 9.6.: Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2$ (A. Tekin). Vorlage: [EW, S. 67-76]

Die Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2$ ist einer der wichtigsten Bausteine der allgemeinen Darstellungstheorie und der Klassifikationstheorie von halb-einfachen Lie-Algebren. Sie soll in diesem Vortrag vollständig beschrieben werden. Insbesondere sollen die Darstellungen in Termen von homogenen Polynomen in zwei Variablen realisiert werden.

7. Vortrag, 16.6.: Cartan's Kriterien (F. Akbari Dehboneh). Vorlage: [EW, S. 77-84]

Cartan's Kriterien erlauben einen einfachen Test auf Auflösbarkeit und Halbeinfachkeit mit Hilfe der Killing-Form. Dies ist eine einer jeden Lie-Algebra natürlich zugeordnete Bilinearform, deren Eigenschaften man mit Linearer Algebra studieren kann.

8. Vortrag, 23.6.: Der Satz von Weyl (M. Yurdayanik). Vorlage: [EW, Appendix B]

Der Satz von Weyl besagt, dass jede endlich-dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra als direkte Summe von unverlegbaren Darstellungen geschrieben werden kann, was das Studium der Darstellungstheorie dieser Algebren auf das Studium der unzerlegbaren Darstellungen zurückführt. Als Anwendungen sollte man, falls die Zeit es erlaubt, das Übereinstimmen der abstrakten und der konkreten Jordanzerlegung diskutieren. Als Vorlage für dies kann Kapitel 6.4 von Humphreys dienen.

9. Vortrag, 30.6.: Wurzelraumzerlegung (J. Hitz). Vorlage: [EW, S. 93-98]

Cartan-Algebren sind spezielle kommutative Unteralgebren einer halbeinfachen Lie-Algebra. Mit Hilfe dieser Algebren zerlegt man die Lie-Algebra in einfacher zu verstehende Teile, sogenannte Wurzelräume. Das Thema eignet sich zur Anfertigung einer Abschlussarbeit.

10. Vortrag, 7.7.: Wurzelsysteme (Daniel Greb). Vorlage: [EW, S. 99-117]

In diesem Vortrag soll der Begriff des Wurzelsystems eingeführt werden. Dies ist ein kombinatorisches Datum, dass man aus der Wurzelraumzerlegung gewinnt.

11./12. Vortrag: Die klassischen Lie-Algebren und Klassifikation von Wurzelsystemen. Vorlage: [EW, S. 118 - 152]

Dies ist der kombinatorische Teil der Klassifikation. Das Thema kann durch zwei Studierende oder durch einen fortgeschrittenen Studierenden bearbeitet werden. Es eignet sich zur Anfertigung einer Abschlussarbeit.

13. Vortag: Einfache Lie-Algebren. Vorlage: [EW, S. 153-162]

Dies schließt die Klassifikation ab.

Literatur

[EW] Karin Erdmann und Mark Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2006.

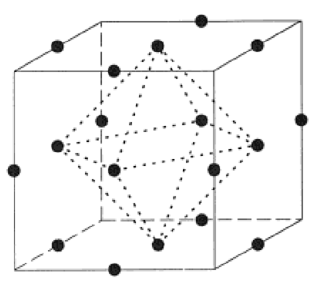
[H] James Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer Graduate Texts in Mathematics, 1997.

[S] Wolfgang Soergel, *Lie Algebren und Ihre Darstellungen*, Vorlesungsskript, Downloadlink wird auf der Website bereitgestellt werden

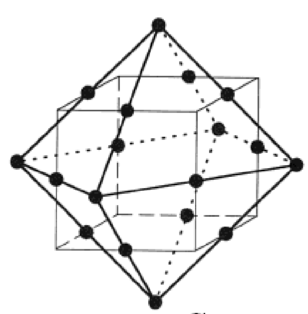
Hinweise:

1) die ersten Editionen von [EW] enthalten eine Menge Rechtschreibfehler. Bitte laden Sie sich daher in jedem Fall die Liste der Errata herunter. Einen Link hierauf finden Sie auf der Website des Seminars.

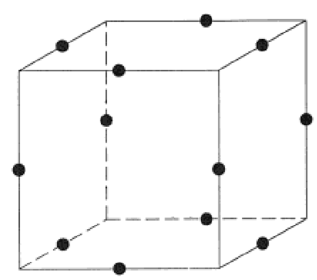
2) Vortragssprache ist Deutsch. Sollten Sie Zweifel haben, wie gewisse Fachbegriffe ins Deutsche zu übertragen sind, schauen Sie bitte in das Skript von Soergel, das denselben Stoff abdeckt wie das Buch von Erdmann-Wildon.



B_3



C_3



$A_3 = D_3$