Une version du théorème d'Amer et Brumer pour les zéro-cycles

Jean-Louis Colliot-Thélène et Marc Levine

À Parimala

1 Introduction

Soit k un corps. Soient f et g deux formes *quadratiques* à coefficients dans k, en $n+1$ variables. Soit t une variable. On sait que le système de formes $f = g = 0$ a un zéro non trivial sur k si et seulement si la forme quadratique $f + tg$ sur le corps $k(t)$ a un zéro non trivial (M. Amer [1], A. Brumer [2], voir [4, III, Prop. 17.14]).

Dans cette note, dont une version primitive fut conçue à Boston en avril 1991, nous montrons que si l'on considère les zéro-cycles de degré 1 plutôt que les points rationnels, il existe en *tout degré* $d \geq 2$ une version de ce résultat pour un système de deux formes de même degré d (Théorème 1), et des versions pour un système quelconque de formes de même degré d (Théorèmes 2 et 3).

Pour K/k une extension de corps et X un k-schéma, on note $X_K = X \times_k K$. Une variété algébrique sur un corps k est un k-schéma séparé de type fini.

2 Indice et indice réduit

Définition 1. Soient k un corps et X une k-variété algébrique. À tout point fermé $P \in X$, de corps résiduel $k(P)$ on associe son degré $[k(P) : k] \in \mathbb{N}$. L'indice $I(X/k)$ de la k-variété X est par définition le plus grand commun diviseur (pgcd) des degrés

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France, e-mail: jlct@math.u-psud.fr

Marc Levine
Department of Mathematics, Northeastern University, 360 Huntington Avenue, Boston, MA 02115, USA and Universität Duisburg-Essen Fakultät Mathematik, Campus Essen, D-45117 Essen, Germany, e-mail: marc.levine@uni-due.de

des points fermés. C'est aussi le pgcd des degrés $[L:k]$ des extensions finies de corps L/k avec $X(L) \neq \emptyset$.

De façon évidente, on a $I(X/k)=1$ si et seulement si X possède un zéro-cycle (cycle de dimension zéro) $\sum_P n_P P$ (avec $n_P \in \mathbb{Z}$) de degré $\sum_P n_P [k(P):k]=1$. On appelle indice réduit de X/k, et on note $I_{red}(X/k)$ le produit des nombres premiers qui divisent $I(X/k)$. De façon triviale, $I(X/k)=1$ si et seulement si $I_{red}(X/k)=1$.

Lemme 1. *Soient k un corps et X une k-variété.*

(a) Si $X=Y\cup Z$ est la réunion ensembliste de deux sous-k-variétés, alors $I(X/k)=$ pgcd$(I(Y/k),I(Z/k))$. En particulier, l'indice de X/k est égal à l'indice de sa sous-k-variété réduite.

(b) Si $X=Y\cup Z$ est la réunion ensembliste de deux sous-k-variétés, alors $I_{red}(X/k)=$ pgcd$(I_{red}(Y/k),I_{red}(Z/k))$.

(c) Si $K=k(t_1,\cdots,t_n)$ est une extension transcendante pure de k, alors $I(X/k)=I(X_K/K)$ et $I_{red}(X/k)=I_{red}(X_K/K)$.

Preuve. Seul le point (c) requiert une explication. Soit $K=k(t)$. Si L/k est une extension finie de corps avec $X(L)\neq\emptyset$ alors $X_{k(t)}(L(t))\neq\emptyset$. Ainsi $I(X_K/K)$ divise $I(X/k)$. Soit P un point fermé de X_K de degré n. On a donc une extension finie de corps L/K et une K-immersion fermée Spec $L \hookrightarrow X_K$. Le corps L est le corps des fonctions d'une k-courbe normale C, finie sur Spec $k[t]$. Il existe un ouvert non vide $U \subset$ Spec $k[t]$ tel que la restriction C_U/U soit finie de degré n, et qu'il existe une U-immersion fermée $C_U \hookrightarrow X\times_k U$. Si le corps k est infini, on choisit un k-point $R\in U(k)$. La fibre de C_U/U au-dessus de ce k-point est le spectre d'une k-algèbre finie de degré n qui admet une k-immersion dans X. Une telle situation définit un zéro-cycle effectif de degré n sur la k-variété X (voir [5, Appendices A1, A2, A3]). Si le corps k est fini, il existe un zéro-cycle $\sum n_i R_i$ tel que tous les points fermés R_i soient dans $U \subset$ Spec $k[t]$ et que $\sum_i n_i[k(R_i):k]=1$. A chaque R_i on associe par la méthode ci-dessus un zéro-cycle effectif z_i de degré $n[k(R_i):k]$ sur la k-variété X. Le zéro-cycle $\sum_i n_i.z_i$ est alors de degré n sur la k-variété X. Ainsi $I(X/k)$ divise $I(X_K/K)$. L'énoncé sur les indices réduits résulte immédiatement de celui sur les indices. □

3 Système de deux formes

Théorème 1. *Soient k un corps, f et g deux formes de degré $d\geq 1$ en $n+1\geq 3$ variables, non toutes deux nulles. Soient t une variable et $K=k(t)$.*

L'indice réduit de la K-hypersurface $W\subset \mathbb{P}^n_K$ définie par $f+tg=0$ coïncide avec l'indice réduit de la k-variété $X\subset\mathbb{P}^n_k$ définie par $f=g=0$.

En particulier, la K-hypersurface $f+tg=0$ possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k-sous-variété X de $\mathbb{P}^n_k$ définie par $f=g=0$ possède un zéro-cycle de degré 1.

Preuve. Pour les k-variétés, on omet l'indice k. Si L/k est une extension finie de corps avec $X(L) \neq \emptyset$, alors $W(L(t)) \neq \emptyset$. Ainsi l'indice $I(W/K)$ divise $I(X/k)$, et donc l'indice réduit $I_{red}(W/K)$ divise l'indice réduit $I_{red}(X/k)$. D'après le lemme 1 (c), pour établir l'énoncé on peut remplacer le corps k par une extension transcendante pure. On supposera donc le corps k infini.

Supposons d'abord que les formes f et g n'ont pas de facteur commun non constant.

Soit $V = \mathbb{P}^n \setminus X$. Notons $I = I(X/k)$. De la suite exacte de localisation ([5, I. Prop. 1.8]) :

$$\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{CH}_0(V) \to 0$$

et du fait que le degré sur k définit un isomorphisme $\mathrm{CH}_0(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$, on tire l'égalité $\mathrm{CH}_0(V) = \mathbb{Z}/I$. Soit $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ la k-variété définie par

$$\lambda f + \mu g = 0.$$

Via la projection $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, c'est l'éclatée de $\mathbb{P}^n$ le long de l'intersection complète $X \subset \mathbb{P}^n$ ([F], Appendix A, Remark A.6). Soit $U \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ l'ouvert complémentaire de Z. La projection $q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induit un morphisme $q_U : U \to V$ qui fait de U un fibré en droites affines sur V. On en déduit un isomorphisme $q_U^* : \mathbb{Z}/I = \mathrm{CH}_0(V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_1(U)$. On a la suite exacte de localisation ([5, I. Prop. 1.8]) :

$$\mathrm{CH}_1(Z) \to \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \to \mathrm{CH}_1(U) \to 0.$$

Par ailleurs les poussettes associées à la projection $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1$ et à la projection $q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induisent un isomorphisme

$$(p_*, q_*) : \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Notons

$$i : \mathrm{CH}_1(Z) \to \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

l'application composée. Sur Z, on trouve les 1-cycles suivants.

Le corps k étant infini, et les formes f et g sans facteur commun, on trouve un cycle $z_1 = \mathbb{P}^1 \times R$, où R est un zéro-cycle effectif de degré d^2 sur X par intersection avec un espace linéaire de codimension 2 convenable. L'image par i de z_1 est $(d^2, 0)$.

L'hypothèse que f et g n'ont pas de facteur commun assure que la k-variété $X \subset \mathbb{P}^n$ est de codimension 2. Soient $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ la grassmannienne des droites dans $\mathbb{P}^n$ et $E \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}^n$ la variété d'incidence. Soient r_1, r_2 les deux projections induites sur E. L'image réciproque $r_2^{-1}(X)$ est de codimension au moins 2 dans E, le morphisme r_1 a ses fibres de dimension 1, donc l'adhérence de $r_1(r_2^{-1}(X))$ dans $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ est de codimension au moins 1. Le corps k étant infini, et la k-variété $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ k-birationnelle à un espace projectif, on peut donc trouver une k-droite $L = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ qui ne rencontre pas X. Soit $q_Z : Z \to \mathbb{P}^n$ la restriction de q à Z. Le morphisme q_Z induit un isomorphisme $Z \setminus q^{-1}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^n \setminus X$. Soit $z_2 \subset Z$ l'image réciproque de L par cet isomorphisme. Ceci définit un 1-cycle sur $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$, dont l'image par i est $(d,1)$. En effet, ce 1-cycle est donné par $L \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$, où la projection sur le second facteur est l'inclusion linéaire $l : L \subset \mathbb{P}^n$, et où la projection sur le premier facteur est donnée par $(-g(l), f(l))$ (on a noté ici l un système de $n+1$ formes linéaires en deux variables). Comme X ne rencontre pas l, le couple $(f(l), g(l))$ de formes homogènes de degré d n'a pas de zéro commun.

Soit $s = I(W/K)$. L'hypersurface $f + tg = 0$ sur le corps K possède un zéro-cycle de degré s. L'adhérence d'un tel zéro-cycle dans $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ définit un 1-cycle z_3 dont l'image par i est de la forme (s,a) pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$.

Le quotient de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ par le groupe engendré par $(d^2,0),(d,1),(s,a)$ est annulé par l'entier $\mathrm{pgcd}(d^2, s-ad)$. De la suite de localisation on conclut que, pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$, l'entier $I = I(X/k)$ divise $\mathrm{pgcd}(d^2, I(W/K) - ad)$. Ainsi $I_{red}(X/k)$ divise $I(W/K)$. Comme par ailleurs $I_{red}(W/K)$ divise $I_{red}(X/k)$, on conclut

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K).$$

Supposons maintenant que $f = h.f_1$ et $g = h.g_1$ avec f_1 et g_1 homogènes de même degré sans facteur commun non constant et h homogène non constant.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_1 \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_2 \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par $f = g = 0$, resp. par $f_1 = g_1 = 0$, resp. par $h = 0$. Soit $W \subset \mathbb{P}^n_K$, resp. W_1/K la variété définie par $f + tg = 0$, resp. $f_1 + tg_1 = 0$. On a

$$I_{red}(W/K) = \mathrm{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_{2,K}/K)) = \mathrm{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k))$$

d'après le lemme 1 et

$$\mathrm{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k)) = \mathrm{pgcd}(I_{red}(X_1/k), I_{red}(X_2/k)) = I_{red}(X/k),$$

la première égalité résultant de $I_{red}(W_1/K) = I_{red}(X_1/k)$ établi ci-dessus, la seconde égalité provenant du lemme 1. Ceci achève la démonstration. □

Le théorème 1 se généralise à un nombre quelconque de formes. Il y a en fait deux généralisations. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. *Soient k un corps, $f_0, f_1, \ldots, f_r$ des formes à coefficients dans k, de degré $d \geq 1$, en $n+1 \geq r+2$ variables $x_0, \ldots, x_n$. La k-variété $X \subset \mathbb{P}^n$ définie par l'annulation de ces formes contient un zéro-cycle effectif de degré d^{r+1}.*

Preuve. Par l'argument donné au lemme 1 (c), on peut supposer le corps k infini. Cette hypothèse sera utilisée de façon constante dans ce qui suit. Soient $g_0, g_1, \ldots, g_r$ des formes de degré d, à coefficients dans k, dont l'annulation définit une sous-k-variété intersection complète et lisse $Y \subset \mathbb{P}^n$. Soit $\mathscr{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^1$ le sous-schéma fermé défini par l'idéal (homogène en les x_i)

$$(tg_0 + (1-t)f_0, \ldots, tg_r + (1-t)f_r) \subset k[t][x_0, \ldots, x_n].$$

Choisisons des formes linéaires $L_1, \ldots, L_{n-r-1} \in k[x_0, \ldots, x_n]$ telles que le sous-schéma de $\mathbb{P}^n$ défini par l'idéal $(g_0, \ldots, g_r, L_1, \ldots, L_{n-r-1})$ soit fini et étale sur k.

Alors le sous-schéma fermé $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{X}$ défini par l'idéal $(L_1,\dots,L_{n-r-1})$ est fini et étale de degré d^{r+1} au-dessus d'un voisinage ouvert U of 1 dans $\mathbb{A}^1$. Soit $\mathscr{C}\subset\mathscr{X}$ l'adhérence schématique de $\mathscr{C}'\cap\mathbb{P}^n_U$ dans $\mathscr{X}$. Le schéma $\mathscr{C}$ est propre sur $\mathbb{A}^1_k$ et comme un sous-schéma ouvert dense de $\mathscr{C}$ est quasi-fini sur $\mathbb{A}^1$, le morphisme $p:\mathscr{C}\to\mathbb{A}^1$ est fini. Comme $p^{-1}(U)\subset\mathscr{C}$ est étale sur U, donc réduit, son adhérence schématique $\mathscr{C}$ est aussi réduite, et chaque composante irréductible de $\mathscr{C}$ s'envoie surjectivement sur $\mathbb{A}^1$. Ainsi $\mathscr{C}$ est plat sur $\mathbb{A}^1$, et donc la fonction

$$a\to\dim_{k(a)}\mathscr{O}_{p^{-1}(a)}$$

est constante sur $\mathbb{A}^1$. En particulier, le 0-cycle associé au sous-schéma fermé $p^{-1}(0)$ de X a degré d^{r+1} sur k. $\square$

4 Système de plusieurs formes, I

Voici la première généralisation du théorème 1.

Théorème 2. *Soient k un corps, et $f_0,f_1,\dots,f_r$, avec $r\geq 1$, des formes à coefficients dans k, de degré $d\geq 1$, en $n+1\geq r+2$ variables. Soit $X\subset\mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par l'annulation de ces $r+1$ formes. Soient $t_1,\dots,t_r$ des variables indépendantes et $K=k(t_1,\dots,t_r)$. Soit $W\subset\mathbb{P}^n_K$ la K-variété définie par $f_1-t_1f_0=\dots=f_r-t_rf_0=0$. On a :*

$$I_{red}(X/k)=I_{red}(W/K).$$

En particulier, la K-variété W possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k-variété X possède un zéro-cycle de degré 1.

Preuve. Pour les k-variétés, on omet l'indice k. Si L/k est une extension finie de corps avec $X(L)\neq\emptyset$, alors $W(L(t))\neq\emptyset$. Ainsi l'indice $I(W/K)$ divise $I(X/k)$, et donc l'indice réduit $I_{red}(W/K)$ divise l'indice réduit $I_{red}(X/k)$. D'après le lemme 1 (c), pour établir l'énoncé on peut remplacer le corps k par une extension transcendante pure. On supposera donc le corps k infini.

Supposons d'abord que les formes f_i n'ont pas de facteur commun non constant.

Soient $V=\mathbb{P}^n\setminus X$ et $I=I(X/k)$. Comme au théorème 1, on a $\mathrm{CH}_0(V)=\mathbb{Z}/I$. Soit $Z\subset\mathbb{P}^r\times\mathbb{P}^n$ la k-variété définie par la proportionalité de $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)$ et de $(f_0,\dots,f_r)$, c'est-à-dire par le système d'équations $\lambda_i.f_j-\lambda_j.f_i=0$ pour $i,j\in\{0,\dots,r\}$. La fibre de $Z\to\mathbb{P}^r$ au-dessus du point générique de $\mathbb{P}^r$ est W/K. Soit $U\subset\mathbb{P}^r\times\mathbb{P}^n$ l'ouvert complémentaire de Z. La projection $q:\mathbb{P}^r\times\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ induit un morphisme $q_U:U\to V$. Soit $q_Z:Z\to\mathbb{P}^n$ le morphisme restriction de q à Z. Il induit un isomorphisme $q_Z^{-1}(V)\xrightarrow{\cong}V$. Les fibres de $q_U:U\to V$ au-dessus d'un point M de V sont donc le complémentaire d'un point dans un espace projectif $\mathbb{P}^r$. De façon plus globale, le morphisme $q_U:U\to V$ se décompose comme

$$U\to U_1\to V$$

où $q_1 : U \to U_1$ est un fibré en droites affines et $q_2 : U_1 \to V$ est un fibré projectif de dimension relative $r-1$. Par image directe par morphisme propre on a un isomorphisme $q_{2*} : \mathrm{CH}_0(U_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_0(V) = \mathbb{Z}/I$. Par image inverse par morphisme plat, on a un isomorphisme $q_1^* : \mathrm{CH}_0(U_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_1(U)$. On a donc un isomorphisme $\mathrm{CH}_1(U) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/I$. On a la suite exacte de localisation

$$\mathrm{CH}_1(Z) \to \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n) \to \mathrm{CH}_1(U) \to 0.$$

Par ailleurs les poussettes associées à la projection $p : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^r$ et à la projection $q : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induisent un isomorphisme

$$(p_*, q_*) : \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^r) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Notons

$$i : \mathrm{CH}_1(Z) \to \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^r) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

l'application composée. Sur Z, on trouve les 1-cycles suivants.

Un cycle $z_1 = \mathbb{P}^1 \times R$, où $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^r$ est une droite et R est un zéro-cycle effectif de degré d^{r+1} sur X, dont l'existence est assurée par le lemme 2. L'image par i de z_1 est $(d^{r+1}, 0)$.

Soit $s = I(W/K)$. Il existe donc un zéro-cycle de degré s sur W/K, et un tel zéro-cycle s'étend en un r-cycle sur Z, cycle génériquement fini sur $\mathbb{P}^r$ de degré relatif s. Sa restriction au-dessus d'une droite générale $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^r$ est un 1-cycle sur Z, dont l'image par i est de la forme (s, a) pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$.

Les formes homogènes $(f_0, \ldots, f_r)$ définissent un k-morphisme $\sigma : V \to \mathbb{P}^r$. Elles définissent donc une section du morphisme $q_V : \mathbb{P}^r_V \to V$, restriction de q à $\mathbb{P}^r_V$, section dont l'image est dans Z : c'est l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme $q_Z^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} V$ mentionné plus haut. L'hypothèse que les f_i n'ont pas de diviseur commun non trivial assure que la k-variété $X \subset \mathbb{P}^n$ est de codimension au moins 2. Le corps k étant infini, par le même argument qu'au théorème 1, on peut donc trouver une k-droite $L = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ qui ne rencontre pas X. La restriction de σ à L est donc un morphisme $L \to Z \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n$, dont l'image est un 1-cycle sur Z. L'image de ce 1-cycle par i est $(d, 1)$.

Le quotient du groupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ par le groupe engendré par les trois éléments $(d^{r+1}, 0)$, (s, a) et $(d, 1)$ est $\mathbb{Z}/J$, avec $J = \mathrm{pgcd}(d^{r+1}, s - ad)$. De la suite de localisation on conclut que $I = I(X/k)$ divise $\mathrm{pgcd}(d^{r+1}, I(W/K) - ad)$ pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi $I_{red}(X/k)$ divise $I(W/K)$. Comme par ailleurs $I_{red}(W/K)$ divise $I_{red}(X/k)$, on obtient

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K).$$

Supposons maintenant que $f_i = h.g_i$ pour tout i avec les g_i homogènes de même degré sans facteur commun non constant et h homogène non constant.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_1 \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_2 \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par l'annulation des f_i, resp. par l'annulation des g_i, resp. par $h = 0$. Soit $W \subset \mathbb{P}^n_K$, resp. W_1/K la variété définie par l'annulation des $f_i - t_i f_0$ $(i = 1,\dots,r)$, resp. par l'annulation des $g_i - t_i g_0$ $(i = 1,\dots,r)$. On a

$$I_{red}(W/K) = \mathrm{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_{2,K}/K)) = \mathrm{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k))$$

d'après le lemme 1 et

$$\mathrm{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k)) = \mathrm{pgcd}(I_{red}(X_1/k), I_{red}(X_2/k)) = I_{red}(X/k),$$

la première égalité résultant de $I_{red}(W_1/K) = I_{red}(X_1/k)$ établi ci-dessus, la seconde égalité provenant du lemme 1. Ceci achève la démonstration. □

5 Système de plusieurs formes, II

Voici la seconde généralisation du théorème 1.

Théorème 3. *Soient k un corps, $f_0, f_1, \dots, f_r$ des formes non toutes nulles, à coefficients dans k, de degré $d \geq 1$, en $n+1 \geq r+2$ variables. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par l'annulation de ces formes. Soient $w_1, \dots, w_r$ des variables indépendantes et $L = k(w_1, \dots, w_r)$. Soit $Y \subset \mathbb{P}^n_L$ l'hypersurface définie par l'équation $f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_r f_r = 0$. On a :*

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(Y/L).$$

En particulier, la L-hypersurface Y possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k-variété X possède un zéro-cycle de degré 1.

Preuve. Soit E_r l'énoncé de ce théorème pour r fixé et tout corps k. L'énoncé E_1 est le théorème 1. Supposons établi E_{r-1}.

Supposons $r \geq 2$. Soient $t_1, \dots, t_r$ des variables indépendantes et $K = k(t_1, \dots, t_r)$. D'après le théorème 2, on a $I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K)$, où la K-variété $W \subset \mathbb{P}^n_K$ est définie par

$$f_1 - t_1 f_0 = \cdots = f_r - t_r f_0 = 0.$$

Soient $s_2, \dots, s_r$ des variables indépendantes et $F = K(s_2, \dots, s_r)$. D'après E_{r-1}, l'indice réduit de W sur $K = k(t_1, \dots, t_r)$ est égal à l'indice réduit sur F de l'hypersurface T définie dans $\mathbb{P}^n_F$ par

$$(f_1 - t_1 f_0) + s_2(f_2 - t_2 f_0) + \cdots + s_r(f_r - t_r f_0) = 0.$$

Ceci se réécrit

$$f_1 - (t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_r t_r) f_0 + s_2 f_2 + \cdots + s_r f_r = 0.$$

Soient $w_1 = -1/(t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_r t_r)$ et, pour $i \geq 2$, $w_i = -s_i/(t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_r t_r)$.

L'équation de l'hypersurface $T \subset \mathbb{P}^n_F$ s'écrit alors

$$f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_r f_r = 0.$$

L'inclusion

$$k(w_1,\ldots,w_r,t_2,\ldots,t_r) \subset k(t_1,t_2,\ldots,t_r,s_2,\ldots,s_r) = F$$

est une égalité. L'extension $F = L(t_2,\ldots,t_r)$ est transcendante pure. D'après le lemme 1, l'indice réduit sur L de l'hypersurface définie par

$$f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_r f_r = 0$$

dans $\mathbb{P}^n_L$ est égal à l'indice réduit de cette hypersurface sur F. Ceci achève la démonstration. □

Remarque 1. A. Pfister, J.W.S. Cassels et D. F. Coray (voir les références dans [3]) ont donné donné des exemples d'intersections complètes de trois quadriques $f_0 = f_1 = f_2 = 0$ dans $\mathbb{P}^n_k$ (sur un corps k de caractéristique différente de 2) qui possèdent un zéro-cycle de degré 1 sans posséder de point rationnel. La quadrique $f_0 + t_1 f_1 + t_2 f_2 = 0$ sur le corps $k(t_1,t_2)$ possède alors un zéro-cycle de degré 1. Comme c'est une quadrique, un théorème de Springer [6] assure que cette quadrique admet un point $k(t_1,t_2)$-rationnel.

On voit ainsi que le théorème 3 ne vaut pas lorsque l'on remplace les zéro-cycles de degré 1 par des points rationnels : le théorème d'Amer et Brumer ne s'étend pas à un système de 3 formes.

Remerciements. Les auteurs savent gré au rapporteur de ses lectures attentives. Marc Levine remercie la NSF (grant number DMS-0801220) et la fondation Alexander von Humboldt.

Littérature

1. M. Amer, Quadratische Formen über Funtionenkörpern, Dissertation, Johannes Gutenberg Universität, Mainz 1976.
2. A. Brumer, Remarques sur les couples de formes quadratiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), no. 16, A679–A681.
3. D. F. Coray, On a problem of Pfister about intersections of three quadrics. Arch. Math. (Basel) **34** (1980), no. 5, 403–411.
4. R. Elman, N. Karpenko, and A. Merkurjev, The algebraic and geometric theory of quadratic forms, AMS Colloquium Publications, vol. **56**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
5. W. Fulton, Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band **2**, Springer-Verlag 1984.
6. T. A. Springer, Sur les formes quadratiques d'indice zéro. C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952) 1517–1519.