C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–6, 2001
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Cobordisme algébrique I

Marc LEVINE [a], Fabien MOREL [b]

[a] Department of Mathematics, Northestearn University, Boston, MA 02115, USA
[b] Institut de mathématiques, Université Paris-7, 2, place Jussieu, 75251 Paris, France
Courriel : marc@neu.edu; morel@math.jussieu.fr

(Reçu et accepté le 27 décembre 2000)

Résumé. Nous introduisons une notion de *théories cohomologiques orientées* sur la catégorie des variétés lisses sur un corps k, inspirée par Quillen. La méthode de Grothendieck permet d'étendre la théorie des classes de Chern à de telles théories. Lorsque $\mathrm{car}(k)=0$, nous établissons qu'il existe une théorie cohomologique orientée universelle $X\mapsto\Omega^*(X)$. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Algebraic cobordism I

Abstract. *We introduce a notion of* oriented cohomology theory *on the category of smooth varieties over a field k inspired by Quillen. Grothendieck's method allows to extend the theory of Chern classes to such theories. When* $\mathrm{char}(k)=0$, *we prove the existence of a universal oriented cohomology theory* $X\mapsto\Omega^*(X)$. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let k be a field, and let $\mathcal{L}_k$ denote the category of smooth quasi-projective k-schemes. Let $\mathcal{R}^*$ be the category of graded-commutative rings. A morphism $f:Y\to X$ in $\mathcal{L}_k$ has *pure codimension* d if for each $y\in Y$, $\dim_k(X,f(y))-\dim_k(Y,y)=d$, where $\dim_k(Y,y)$ is the dimension of Y in a neighborhood of y.

DEFINITION 1. – An oriented cohomology theory A^* on $\mathcal{L}_k$ is given by a functor $A^*:\mathcal{L}_k^{\mathrm{op}}\to\mathcal{R}^*$, together with a homomorphism of graded groups $f_*:A^*(Y)\to A^{*+2d}(X)$ for each projective morphism $f:Y\to X$ of pure codimension d, satisfying the following:

A1) Given projective morphisms $g:Z\to Y$, $f:Y\to X$, having pure codimension, one has $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.

A2) Let $L\to X$ be a line bundle over $X\in\mathcal{L}_k$ with zero-section s. Define $\mathrm{c}_1(L):=s^*s_*(1_X)$. Then, for $E\to X$ a rank $n+1$ vector bundle with projective bundle $q:\mathbf{P}(E)\to X$ and tautological sub-line-bundle λ of q^*E, $A^*(\mathbf{P}(E))$ is a free $A^*(X)$-module, with basis $1,\mathrm{c}_1(\lambda),\dots,\mathrm{c}_1(\lambda)^n$.

A3) Let $f:Y\to X$ be a projective morphism in $\mathcal{L}_k$, and $g:Z\to X$ a morphism in $\mathcal{L}_k$ which is transverse to g, giving the scheme $Y':=Y\times_X Z$ in $\mathcal{L}_k$ with projections $f':Y'\to Z$, $g':Y'\to Y$. Then $f'_*g'^*=g^*f_*$.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

S0764-4442(01)01832-8/FLA

A4) Let $E \to X$ be a vector bundle over $X \in \mathcal{L}_k$, and let $p : V \to X$ be a principal homogeneous space for E. Then $p^* : A^*(X) \to A^*(V)$ is an isomorphism.

Remark 1. – For $X \in \mathcal{L}_k$, let $\mathcal{M}(X)$ be the set of isomorphism classes of projective morphisms of pure codimension $Y \to X$ in $\mathcal{L}_k$. Make $\mathcal{M}(X)$ into a monoid by disjoint union, and define a grading by taking the codimension. Composition on the right makes $\mathcal{M}$ into a covariant functor from $\mathcal{L}_k$ (with morphisms projective maps) to graded monoids. Letting $\mathcal{M}^+(X)$ denote the group completion of $\mathcal{M}(X)$, we have the functor $\mathcal{M}^+$. Sending $f : Y \to X$ in $\mathcal{M}(X)$ to $f_* 1_Y$ gives a natural transformation of functors $\rho_A : \mathcal{M}^+ \to A^*$.

THEOREM 2. – *Let k be a field of characteristic zero. Then there is a universal oriented cohomology theory Ω^* on $\mathcal{L}_k$. In addition, the natural transformation $\rho_\Omega : \mathcal{M}^+ \to \Omega^*$ is surjective. Finally, let $i : Z \to X$ be a closed immersion in $\mathcal{L}_k$ of codimension d, and $j : U \to X$ the open complement. Then the following sequence is exact*

$$\Omega^{*-2d}(Z) \xrightarrow{i_*} \Omega^*(X) \xrightarrow{j^*} \Omega^*(U) \longrightarrow 0.$$

Dans cette Note [1] k désigne un corps commutatif. On le suppose de caractéristique 0 à partir du paragraphe 2.

1. Théories cohomologiques orientées

On note $\mathcal{L}_k$ la catégorie des k-variétés quasi projectives lisses, appelées plus simplement k-variétés lisses dans la suite. Un morphisme projectif $f : Y \to X$ (dans $\mathcal{L}_k$) est dit de pure codimension si pour tout $y \in Y$ l'entier [2] $\dim_{f(y)}(X) - \dim_y(Y)$ est indépendant de y. Cet entier s'appelle alors la codimension de f. Soit $\mathcal{R}^*$ la catégorie des anneaux gradués commutatifs.

DÉFINITION 1.1. – Une *théorie cohomologique orientée* A^* sur la catégorie $\mathcal{L}_k$ est la donnée :
1) d'un foncteur $A^*(-) : (\mathcal{L}_k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{R}^*$, $X \mapsto A^*(X)$;
2) pour tout morphisme projectif $f : Y \to X$ de codimension d, d'un homomorphisme de groupes abéliens gradués, appelé *homomorphisme de Gysin* : $f_* : A^*(Y) \to A^{*+2d}(X)$, tels que les axiomes suivants sont satisfaits :

A1) Pour toute paire : $g : Z \to Y$, $f : Y \to X$ de morphismes projectifs de pure codimension on a :

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*.$$

A2) Pour tout fibré vectoriel ξ de rang n sur $X \in \mathcal{L}_k$, notons $\pi : \mathbf{P}(\xi) \to X$ le projectif associé à ξ, λ_ξ le sous-fibré vectoriel de rang un canonique de $\pi^*(\xi)$ et $u \in A^2(\mathbf{P}(\xi))$ l'élément $u := s^*(s_*(1)) \in A^2(\mathbf{P}\xi)$, s désignant la section nulle du fibré vectoriel λ_ξ. Alors le $A^*(X)$-module $A^*(\mathbf{P}(\xi))$ est libre de base l'ensemble $\{1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\}$.

A3) Pour tout morphisme projectif $f : Y \to X$ de pure codimension et tout morphisme $g : X' \to X$ transverse à f notons Y' la k-variété quasi projective lisse $X' \times_X Y$, $g' : Y' \to Y$ et $f' : Y' \to X'$ les deux morphismes évidents, f' étant d'ailleurs projectif et pure de même codimension que f. On a alors :

$$g^* \circ f_* = f'_* \circ g'^*.$$

A4) Pour tout fibré vectoriel ξ sur $X \in \mathcal{L}_k$ et tout ξ-torseur $\pi : T \to X$ l'homomorphisme

$$\pi^* : A^*(X) \longrightarrow A^*(T)$$

est un isomorphisme.

S0764-4442(01)01832-8/FLA AID:1832 Vol.332(0) P.3 (1-6)
CRAcad 2001/04/12 Prn:13/04/2001; 14:20 F:PXMA1832.tex by: p. 3

Pour toute telle théorie cohomologique orientée A^* et tout $X \in \mathcal{L}_k$, on note $\mathrm{c}_1 : \mathrm{Pic}(X) \to A^2(X)$ l'application $\lambda \mapsto i^*(i_*(1)) \in A^2(X)$, $\lambda \in \mathrm{Pic}(X)$ désignant un fibré vectoriel inversible et $i : X \to E(\lambda)$ sa section nulle. À l'aide de l'axiome A3) on établit sans peine que c_1 est une transformation naturelle $\mathrm{Pic} \to A^2$. Mais, en général, et c'est précisément là un des points fondamentaux de ce travail, la transformation précédente n'est pas un homomorphisme de groupes.

Si $f : Y \to X$ est un morphisme projectif de codimension n on note $[f]_{A^*}$ (ou encore $[Y \to X]_{A^*}$) l'élément $f_*(1_Y) \in A^{2n}(X)$ appelé « classe » de $f : Y \to X$. Bien sûr on a $[\mathrm{Id}_X]_{A^*} = 1 \in A^0(X)$.

L'axiome A3) permet d'établir également la formule de projection : si $f : Y \to X$ est un morphisme projectif, $\alpha \in A^*(X)$ et $\beta \in A^*(Y)$ on a $f_*(f^*(\alpha) \cdot \beta) = \alpha \cdot f_*(\beta) \in A^*(X)$.

Exemple 1.2. – 1) Pour toute variété lisse $X \in \mathcal{L}_k$, notons $\mathrm{CH}^*(X)$ l'anneau de Chow de X (*voir* par exemple [2]), que l'on voit placé en degré pairs. Si l'on munit ce foncteur des morphismes de Gysin usuels, on obtient bien une théorie cohomologique orientée.

2) Soit ℓ un nombre premier $\neq \mathrm{car}(k)$. Alors le foncteur $X \mapsto \bigoplus_n \mathrm{H}^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_\ell(n))$ (dans lequel $\mathrm{H}^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_\ell(n))$ est de degré $2n$) muni des morphismes de Gysin habituels est une théorie cohomologique orientée.

Exemple 1.3. – Soit $X \in \mathcal{L}_k$. On note $K_0(X)[\beta, \beta^{-1}]$ l'anneau gradué commutatif des polynômes de Laurent à coefficients dans $K_0(X)$ (placé en degré 0) avec β une variable placée en degré -2. Soient $f : Y \to X$ un morphisme projectif (de $\mathcal{L}_k$) et ξ un fibré vectoriel sur Y. On définit le morphisme de Gysin

$$f_* : K_0(Y)\big[\beta, \beta^{-1}\big] \to K_0(X)\big[\beta, \beta^{-1}\big]$$

par la formule

$$f_*(\xi) = \left(\sum_i (-1)^i R^i f_*(\xi)\right) \cdot \beta^{\dim X - \dim Y}.$$

On obtient ainsi une théorie cohomologique orientée et l'on vérifie que

$$\mathrm{c}_1(\lambda) = \big(1 - [\lambda^\vee]\big) \cdot \beta^{-1} \in K_0(X) \cdot \beta^{-1}$$

pour tout fibré vectoriel de rang un λ sur X.

Exemple 1.4. – Soient $\sigma : k \to \mathbf{C}$ un plongement complexe de k et MU le spectre de cobordisme complexe [1]. On peut montrer que le foncteur $X \mapsto \mathrm{MU}^*(X_\sigma(\mathbf{C}))$ admet une structure de théorie cohomologique orientée. Plus généralement, pour tout T-spectre en anneaux commutatifs E sur k [10] muni d'une orientation, c'est-à-dire d'une classe $u \in E^{2,1}(\mathbf{P}^\infty)$ dont la restriction à $\mathbf{P}^1$ est la classe évidente, le foncteur $X \mapsto \bigoplus_n E^{2n,n}$ admet une structure de théorie cohomologique orientée.[3] Par exemple si $E = H\mathbf{Z}$ (le T-spectre de cohomologie motivique de [10]) on retrouve les groupes de Chow. Si E est le spectre de cobordisme algébrique MGL [10] on trouve une théorie cohomologique orientée, notée $X \mapsto \bigoplus_n \mathrm{MGL}^{2n,n}(X)$.

Observons que pour toute théorie cohomologique orientée A^* la méthode de Grothendieck [3] permet de définir les classes de Chern $\mathrm{c}_i(\xi)$ pour tout fibré vectoriel ξ de rang n sur X. D'après l'axiome A2) en effet, il existe une unique famille $\{\mathrm{c}_1(\xi), \ldots, \mathrm{c}_n(\xi)\} \in (A^*(X))^n$ vérifiant l'équation

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \mathrm{c}_i(\xi) u^{n-i} = 0,$$

avec la convention $\mathrm{c}_0(\xi) = 1$, u désignant le c_1 du fibré vectoriel de rang un λ_ξ. On montre alors toutes les propriétés standard des classes de Chern comme dans [3]. En particulier les classes de Chern d'un fibré trivial sont nulles (sauf c_0 !) et l'on voit que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et toute variété lisse X, l'homomorphisme d'anneaux gradués commutatifs $A^*(X)[u]/u^{n+1} \to A^*(\mathbf{P}^n \times X)$ est un isomorphisme.

S0764-4442(01)01832-8/FLA AID:1832 Vol.332(0) P.4 (1-6)
CRAcad 2001/04/12 Prn:13/04/2001; 14:20 F:PXMA1832.tex by: p. 4

Ainsi, pour tous entiers n, $m \geqslant 0$, l'homomorphisme d'anneaux gradués commutatifs

$$A^*\big(\mathrm{Spec}(k)\big)[u,v]/u^{n+1}, v^{m+1} \longrightarrow A^*\big(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m\big)$$

est un isomorphisme. Le c_1 du produit tensoriel $\pi_1^*(\lambda) \otimes \pi_2^*(\lambda)$ des deux images réciproques du fibré canonique λ sur le projectif définit un élément $F_{n,m} \in A^*(\mathrm{Spec}(k))[u,v]/u^{n+1}, v^{m+1}$. Ces éléments définissent (en passant à la limite en n et m) une série formelle en u et v de degré 2 :

$$F_{A^*}(u,v) \in A^*\big(\mathrm{Spec}(k)\big)[[u,v]].$$

Cette série formelle est une loi de groupe formelle commutative[4] sur l'anneau $A^*(\mathrm{Spec}(k))$ [1,5]. Autrement dit, $F(u,v) = F(v,u)$, $F(u,0) = F(0,u) = u$ et $F(u, F(v,w)) = F(F(u,v),w)$. Il existe alors une unique série formelle $\chi_F \in A^*(\mathrm{Spec}(k))[[u]]$ telle que $F(u, \chi_F(u)) = 0$ appelée « passage à l'inverse » de la loi de groupe formelle. Observons que si $\alpha \in A^*(X)$ et $\beta \in A^*(X)$ sont deux classes dont l'une d'entre elles est nilpotente alors l'expression $F(\alpha,\beta)$ définit un élément de $A^*(X)$.

LEMME 1.5. – *Pour tout fibré vectoriel inversible λ sur X l'élément $\mathrm{c}_1(\lambda)$ est nilpotent dans l'anneau $A^*(X)$ et l'on a pour toute paire $(\lambda,\mu) \in \mathrm{Pic}(X)^2$:*

$$\mathrm{c}_1(\lambda \otimes \mu) = F_{A^*}\big(\mathrm{c}_1(\lambda), \mathrm{c}_1(\mu)\big), \quad \mathrm{c}_1\big(\lambda^{-1}\big) = \chi_{F_{A^*}}\big(\mathrm{c}_1(\lambda)\big).$$

À l'aide de la déformation au fibré normal d'une immersion fermée les lemmes précédents impliquent facilement le lemme :

LEMME 1.6. – *Soit $i : Z \to X$ une immersion fermée entre deux k-variétés lisses. On note X_Z l'éclaté de X le long de Z, Y l'éclaté de $Z \times \{0\}$ dans $X \times \mathbf{P}^1$, $f : Y \to X$ le morphisme évident, ν_i le fibré normal de i et $[P]_{A^*} \in A^0(X)$ la classe du morphisme $\mathbf{P}(\nu_i \oplus \varepsilon) \to X$, ε désignant le fibré trivial de rang 1. Alors $[P]_{A^*}$ est nilpotente et l'on a l'égalité*

$$[X_Z \to X]_{A^*} = f_*\big(3\mathrm{D}F_{A^*}\big([\mathrm{Id}_X]_{A^*}, \chi_{A^*}\big([P]_{A^*}\big)\big)\big)$$

dans $A^0(X)$.

Dans les exemples « ordinaires », anneaux de Chow, cohomologie étale, on trouve toujours $F(u,v) = u + v$. C'est la loi de groupe *additive*.[5] Dans l'exemple $X \mapsto K_0(X)[\beta, \beta^{-1}]$, on trouve $F(u,v) = u + v - \beta \cdot u \cdot v$, appelée loi de groupe multiplicative.

L'anneau de Lazard [5] est le quotient de l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}[a_{i,j}]$, $(i,j) \in \mathbf{N}^2$ par les relations qui font de la série formelle $F_U(u,v) = \Sigma_{i,j} a_{i,j} u^i v^j$ une loi de groupe formelle commutative. Si l'on donne à $a_{i,j}$ le degré $2(1-i-j)$, L devient un anneau gradué commutatif et la loi de groupe formelle $F_U(u,v)$ est homogène de degré 2 en donnant à u et v le degré 2. D'après Lazard [1,5] L est un anneau de polynômes à coefficients entiers sur des générateurs x_i de degré $2i$. Par construction donc, se donner un anneau commutatif R et une loi de groupe formelle commutative sur R est équivalent à se donner un homomorphisme d'anneaux commutatifs $L \to R$.

2. Cobordisme algébrique

À partir de maintenant, on suppose $\mathrm{car}(k) = 0$.

Soient $X \in \mathcal{L}_k$ et $n \in \mathbf{Z}$. On note $\mathcal{M}^n(X)$ le monoïde commutatif (pour la somme disjointe) des classes d'isomorphismes de morphismes projectifs $f : Y \to X$ de codimension n et $\mathcal{M}^n(X)^+$ son groupe de Grothendieck associé. Si $f : Y \to X$ est un tel morphisme, son image dans $\mathcal{M}^n(X)^+$ se notera $[f]$ (ou encore $[Y \to X]$).

Soit A^* une théorie cohomologique orientée. On définit (comme dans [9]) l'homomorphisme canonique

$$\tau_{A^*} : \mathcal{M}^n(X)^+ \longrightarrow A^{2n}(X), \quad [f : Y \to X] \longmapsto f_*(1) = [f]_{A^*} \in A^{2n}(X).$$

On peut considérer les théories cohomologiques comme formant une catégorie, les morphismes étant les transformations naturelles commutant à toutes les données.

THÉORÈME 2.1. – *Supposons que* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Alors, la catégorie des théories cohomologiques orientées possède un objet initial que l'on note* $X \mapsto \Omega^*(X)$.

De plus, l'homomorphisme canonique $\tau_\Omega : \mathcal{M}^n(X)^+ \to \Omega^{2n}(X)$ *est surjectif* (*et bien sûr* $\Omega^*(X)$ *est nul en degrés impairs*).

La théorie $X \mapsto \Omega^*(X)$ s'appelle le *cobordisme algébrique*. Un des résultats fondamentaux que nous établissons, et qui n'apparaît pas dans les axiomes, est le théorème de localisation suivant :

THÉORÈME 2.2. – *Soient* $i : Z \to X$ *une immersion fermée de codimension* d *entre* k*-variétés lisses et* $j : U \subset X$ *l'ouvert complémentaire. Alors le diagramme suivant*

$$\Omega^{*-2d}(Z) \xrightarrow{i_*} \Omega^*(X) \xrightarrow{j^*} \Omega^*(U) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de groupes abéliens.

Pour définir $X \mapsto \Omega^*(X)$ pour X dans $\mathcal{L}_k$ on procède comme suit. On note $\mathcal{M}^*(X)^+$ le groupe abélien gradué formé par les $\mathcal{M}^n(X)^+$, placés en degré $2n$. On note $X \mapsto \text{Pre-}\Omega^*(X)$ le quotient de $\mathcal{M}^*(X)^+$ par la relation engendrée[6] par les cobordismes élémentaires : on dit que $f : Y \to X$ et $g : Z \to X$ sont élémentairement cobordants si et seulement si il existe un morphisme projectif $h : W \to X \times \mathbf{A}^1$ transverse à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ tel que $h^{-1}(X \times \{0\}) \to X$ est isomorphe à f et $h^{-1}(X \times \{1\}) \to X$ est isomorphe à g. Soit λ un fibré vectoriel de rang un sur X, que l'on suppose engendré par ses sections. Soient $Y \to X$ un élément de $\mathcal{M}^*(X)$, $s : Y \to E(\lambda)$ une section transverse à la section nulle (on observera qu'il en existe) et $Z \subset Y$ la sous-variété (lisse sur k) définie par l'équation $s = 0$. Alors la classe du morphisme projectif $Z \subset Y \to X$ ne dépend que de la classe de $Y \to X$ dans $\text{Pre-}\Omega^*(X)$. On obtient ainsi un endomorphisme $\mathrm{c}_1(\lambda) : \text{Pre-}\Omega^*(X) \to \text{Pre-}\Omega^{*+2}(X)$. De plus, les $\mathrm{c}_1(\lambda)$, pour λ engendré par ses sections, sont nilpotents et commutent deux à deux. En particulier, pour λ et μ deux tels fibrés inversibles sur X on peut définir un endomorphisme L-linéaire $\text{Pre-}\Omega^*(X) \otimes L \to \text{Pre-}\Omega^*(X) \otimes L$ en « calculant » la série formelle $F_U(\mathrm{c}_1(\lambda), \mathrm{c}_1(\mu))$. On note $X \mapsto \widetilde{\Omega}^*(X)$ le quotient de $X \mapsto \text{Pre-}\Omega^*(X)$ par la relation engendrée par les éléments de la forme : $\mathrm{c}_1(\lambda \otimes \mu) - F_U(\mathrm{c}_1(\lambda), \mathrm{c}_1(\mu))$.

L'homomorphisme évident $\text{Pre-}\Omega^*(X) \to \widetilde{\Omega}^*(X)$ est alors surjectif et de plus il existe une et une seule application $\mathrm{c}_1 : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{End}_L(\widetilde{\Omega}^*(X))$ qui étend l'application c_1 précédente et telle que l'image est constituée d'élément nilpotents, commutants deux à deux, et vérifiant pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Pic}(X)^2$:

$$\mathrm{c}_1(\lambda \otimes \mu) = F_U\big(\mathrm{c}_1(\lambda), \mathrm{c}_1(\mu)\big).$$

Enfin, on note $X \mapsto \Omega^*(X)$ le quotient de $X \mapsto \widetilde{\Omega}^*(X)$ par la relation engendrée par les éléments de la forme : $[Y \to X] - \mathrm{c}_1(\lambda_Y)([\mathrm{Id}_X])$, Y désignant une sous-variété fermée de X, lisse sur k, et de codimension 1, et λ_Y désignant le fibré vectoriel inversible dont le $\mathcal{O}_X$-module des sections est le dual de l'idéal défini par Y.

Il est clair que pour toute théorie cohomologique orientée A^* l'homomorphisme $\tau_{A^*} : \mathcal{M}^n(X)^+ \to A^n(X)$ induit un homomorphisme $\Omega^n(X) \to A^n(X)$. Les morphisme f_* sont évidents à définir (c'est la composition des morphismes projectifs). Le coeur de la démonstration du théorème précédent consiste à faire de $X \to \Omega^*(X)$ un foncteur, autrement dit de définir des « pull-backs » et de vérifier les axiomes. On commence par établir le théorème 2.2 à l'aide des résultats de [4] et de la formule du lemme 1.6.

Soient R^* un anneau gradué commutatif et $F(u, v)$ une loi de groupe formelle homogène de degré 2. On dispose donc d'un homomorphisme canonique d'anneaux gradués commutatifs $L \to R^*$. On peut alors observer que la correspondance $X \mapsto \Omega^*(X) \otimes_L R^*$ possède une structure canonique de théorie cohomologique orientée.

D'après le théorème 2.1 on dispose d'un morphisme canonique de théories cohomologiques orientées $\Omega^*(-) \to \mathrm{CH}^*(-)$ (qui bien sûr envoie $[f : Y \to X] \in \Omega^n(X)$ sur 0 si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas de codimension n et sur $[k(Y) : k(\mathrm{Im}(f))] \cdot \mathrm{Im}(f)$ si $\mathrm{Im}(f)$ est de codimension n). Observons que d'après le théorème de Hironaka cet homomorphisme est surjectif. Observons également que si l'on munit $\mathbf{Z}$ de la loi de groupe additive, le morphisme précédent induit un morphisme $\Omega^*(-) \otimes_L \mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{CH}^*(-)$ de théories cohomologiques orientées. Dans [6] nous établirons que cet homomorphisme est un isomorphisme.

De même, si l'on munit l'anneau gradué commutatif $\mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}]$ de la loi de groupe multiplicative, on dispose d'un morphisme canonique $\Omega^*(-) \otimes_L \mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}] \longrightarrow K_0(-)[\beta;\beta^{-1}]$.

Dans [6] nous établirons également que cet homomorphisme est un isomorphisme de théories cohomologiques orientées.

Enfin, nous conjecturons que le morphisme canonique (donné par le théorème 2.1)

$$\Omega^*(-) \longrightarrow \bigoplus_n \mathrm{MGL}^{2n,n}(-)$$

vers la théorie obtenue dans l'exemple 1.4 avec le spectre MGL est un isomorphisme de théories cohomologiques orientées.

---

[1] Les démonstrations détaillées paraîtront dans [7].

[2] Si X est une k-variété lisse et $x \in X$ on note $\dim_x(X)$ la dimension de Krull de la composante irréductible de X qui contient x.

[3] on peut s'en convaincre en utilisant [8]. Les théories orientées au sens de [8], pour lesquelles le c_1 est en degré 2, définissent des théories cohomologiques orientée en notre sens.

[4] de rang 1.

[5] Ce peut être d'ailleurs là une définition de la notion de théorie « ordinaire » : c'est une théorie cohomologique orientée pour laquelle la loi de groupe formelle est additive.

[6] c'est-à-dire que pour chaque X on quotiente par le sous-groupe engendré par toutes les images par composition par un morphisme projectif de but X des relations explicitées.

Références bibliographiques

[1] Adams J.F., Stable Homotopy and Generalised Homology, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1974.
[2] Fulton W., Intersection Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 2 (3), Springer-Verlag, Berlin–New York, 1984.
[3] Grothendieck A., La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 137–154.
[4] Hironaka H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, Ann. of Math. 79 (2) (1964) 109–203; ibid. 79 (2) (1964) 205–326.
[5] Lazard M., Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, Bull. Soc. Math. France 83 (1955) 251–274.
[6] Levine M., Morel F., Cobordisme algébrique II, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2001) (à paraître).
[7] Levine M., Morel F., Algebraic cobordism (en préparation).
[8] Panin I., Smirnov A., Oriented cohomology theories and Riemann–Roch–Grothendieck theorem, Preprint.
[9] Quillen D.G., Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Adv. in Math. 7 (1971) 29–56.
[10] Voevodsky V., The Milnor conjecture, available at http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/index.html.