C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–6, 2001
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Cobordisme algébrique II

Marc LEVINE [a], Fabien MOREL [b]

[a] **Department of Mathematics, Northestearn University, Boston, MA 02115, USA**
[b] **Institut de mathématiques, Université Paris-7, 2, place Jussieu, 75251 Paris, France**
Courriel : marc@neu.edu; morel@math.jussieu.fr

(Reçu et accepté le 27 décembre 2000)

Résumé. Pour tout corps k de caractéristique 0, nous établissons pour le cobordisme algébrique l'analogue d'un théorème de Quillen concernant le cobordisme complexe : l'anneau de cobordisme algébrique $\Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ du corps de base s'identifie à l'anneau L de Lazard et plus généralement, pour toute k-variété X lisse et irréductible l'anneau de cobordisme algébrique $\Omega^*(X)$ est engendré comme module sur l'anneau L par l'unité $1 \in \Omega^0(X)$ et les éléments de degré strictement positifs. Ce résultat implique la formule du degré conjecturée par Rost, sous sa forme la plus générale. Enfin, nous relions explicitement l'anneau de Chow ainsi que le K_0 d'une k-variété lisse X à $\Omega^*(X)$. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Algebraic cobordism II

Abstract. *For any field k of characteristic 0 we prove for the algebraic cobordism the analogue of a theorem of Quillen on complex cobordism: the cobordism ring of the ground field is the Lazard ring L and for any smooth k-variety X, the algebraic cobordism ring $\Omega^*(X)$ is generated, as an L-module, by $1 \in \Omega^0(X)$ and the element of positive degrees. This implies Rost's conjectured degree formula. We also give a relation between the Chow ring, the K_0 of a smooth k-variety X and $\Omega^*(X)$.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

We retain the notations of [5]. Let A^* be an oriented cohomology theory. The operation c_1 defines the natural transformation of pointed set valued functors on $\mathcal{L}_k$, $\mathrm{c}_1 : \mathrm{Pic} \to A^2$, which in general is *not* additive. Following the method of Quillen [9] one can show there is a unique power series $F_A(u,v) \in A^*(\mathrm{Spec}(k))[[u,v]]$ such that $\mathrm{c}_1(L \otimes M) = F_A(\mathrm{c}_1(L), \mathrm{c}_1(M))$ for each pair of line bundles L, M on an $X \in \mathcal{L}_k$. In addition $F_A \in A^*(\mathrm{Spec}(k))[[u,v]]$ defines a rank one commutative formal group on $A^*(\mathrm{Spec}(k))$, i.e., a power series $F(u,v) \in A^*(\mathrm{Spec}(k))[[u,v]]$ satisfying the evident properties of identity, commutativity and associativity. We let (F, L) denote the universal rank one, commutative formal group; L is called the *Lazard ring*. One hence has a canonical homomorphism $\phi_A : L \to A^*(\mathrm{Spec}(k))$ with $\phi_A(F) = F_A$.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

S0764-4442(01)01833-X/FLA

We recall from [5] the existence of a universal oriented cohomology theory Ω^* on $\mathcal{L}_k$, where k is a field of characteristic zero.

THEOREM 1. – *The homomorphism* $\phi_\Omega : L \to \Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ *is an isomorphism.*

Remark 1. – Both the Chow ring $\mathrm{CH}^*(X)$, and the Grothendieck group of algebraic vector bundles $K_0(X)$ form oriented cohomology theories on $\mathcal{L}_k$ (for K_0, one needs to adjoin a formal "Bott element" β of degree -2 to give the graded theory $K_0(X)[\beta, \beta^{-1}]$). In fact, the canonical natural transformations $\Omega^* \to \mathrm{CH}^*$ and $\Omega^* \to K_0[\beta, \beta^{-1}]$ induce the identifications $\mathrm{CH}^* \cong \Omega^* \otimes_L \mathbf{Z}$ and $K_0[\beta, \beta^{-1}] \cong \Omega^* \otimes_L \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}]$. The homomorphisms $L \to \mathbf{Z}$, $L \to \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ required to define the tensor products correspond to the additive and the multiplicative formal groups, respectively.

For a projective morphism $f : Y \to X$ in $\mathcal{L}_k$ of pure codimension with X irreducible with field of functions $k(X)$, let $\deg f \in L$ be the image of the class of $f \in \Omega^*(X)$ via

$$\Omega^*(X) \longrightarrow \Omega^*\big(k(X)\big) \cong L,$$

where the second map is the inverse of the natural isomorphism $L \cong \Omega^*(k(X))$ of Theorem 1). Finally, for $X \in \mathcal{L}_k$ irreducible and projective over k, let $[X] \in L$ denote the class of X in $L \cong \Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ and $M(X) \subset L$ be the ideal generated by classes $[Y]$, where $Y \in \mathcal{L}_k$ is smooth projective over k, irreducible, with $\dim(Y) < \dim(X)$ and admits an $\mathcal{L}_k$-morphism $Y \to X$.

THEOREM 2. – *Let* $f : Y \to X$ *be a map in* $\mathcal{L}_k$*, with* X *and* Y *projective, irreducible. Then*

$$[Y] - (\deg f)[X] \in M(X).$$

Remark 2. – Let $s_d(X)$ denote the characteristic number of a smooth projective irreducible k-variety X of dimension d associated with the *Newton polynomial*. Now let $f : Y \to X$ be a morphism between irreducible projective varieties in $\mathcal{L}_k$, both having the same dimension d. In this case, $\deg f$ is just the usual degree. Suppose that $d = p^n - 1$, p a prime and $n > 0$. One then knows that $s_d(X)$ is always divisible by p. As pointed out in [?], it follows from Theorem 2 that there is a zero-cycle z on X such that

$$\frac{s_d(Y)}{p} - (\deg f)\frac{s_d(X)}{p} = \deg(z) \in \mathbf{Z}.$$

Cette note [1] est la suite de [5]. Ici, k désigne un corps commutatif de caractéristique 0.

1. L'anneau de cobordisme algébrique d'un corps

D'après ce que l'on a vu dans [5], on dispose d'une loi de groupe formelle commutative homogène de degré 2 sur $\Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ et donc d'un homomorphisme canonique d'anneaux gradués commutatifs

$$\phi : L \longrightarrow \Omega^*\big(\mathrm{Spec}(k)\big).$$

Notons MU^* l'anneau de cobordisme complexe [2,8,9]. Soient $\sigma : k \to \mathbf{C}$ un plongement complexe de k et $\Psi : \Omega^*(\mathrm{Spec}(k)) \to \mathrm{MU}^*$, $[X] \mapsto [X_\sigma(\mathbf{C})]$ l'homomorphisme évident d'anneaux gradués commutatifs, qui à une variété projective lisse X de dimension n associe la classe dans MU^{2n} de la variété compacte différentiable $X_\sigma(\mathbf{C})$ des points complexes de X, munie de sa structure presque complexe évidente. [2] Il est clair que le composé $L \to \Omega^*(\mathrm{Spec}(k)) \to \mathrm{MU}^*$ est exactement l'homomorphisme correspondant à la loi de groupe formelle sur MU^* ; c'est donc un isomorphisme d'après Quillen [9]. En particulier, l'homomorphisme $\Phi : L \to \Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ est toujours injectif.

THÉORÈME 1.1. – *L'homomorphisme* $\phi : L \to \Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ *est un isomorphisme.*

S0764-4442(01)01833-X/FLA AID:1833 Vol.332(0) P.3 (1-6)
CRAcad 2001/04/12 Prn:13/04/2001; 14:21 F:PXMA1833.tex by: p. 3

La surjectivité se démontre par récurrence sur la dimension des variétés et utilise [1]. L'injectivité a été vue ci-dessus.

En particulier, l'homomorphisme $\Psi : \Omega^*(\mathrm{Spec}(k)) \to \mathrm{MU}^*$ précédent est un isomorphisme.

Remarque 1.2. – Soient $\Psi_{\mathbf{R}} : \Omega^*(\mathrm{Spec}(\mathbf{R})) \to \mathrm{MO}^*$, $[X] \mapsto [X_\sigma(\mathbf{R})]$ l'homomorphisme évident d'anneaux commutatifs qui, à une variété projective lisse X sur $\mathbf{R}$ de dimension n, associe la classe dans l'anneau de cobordisme (non orienté) MO^* de la variété compacte différentiable $X_\sigma(\mathbf{R})$ des points réels de X (observer que $\Psi_{\mathbf{R}}$ divise les degrés par 2). D'après [9] la théorie des classes de Stiefel–Whitney définit un épimorphisme $L \to \mathrm{MO}^*$ dont le noyau est l'idéal (homogène) engendré par les coefficients de la série formelle $[2](u) := F_U(u,u] \in L[[u]]$. Il est clair que $\Psi_{\mathbf{R}} \circ \Phi : L \to \mathrm{MO}^*$ est l'épimorphisme précédent. Puis que Φ est un isomorphisme d'après le théorème 1.1 on obtient l'interprétation « géométrique » suivante de l'épimorphisme $\mathrm{MU}^* = L \to L/[2] = \mathrm{MO}^*$: soit $x \in \mathrm{MU}^*$ un élément « représenté » par une variété projective lisse V sur $\mathbf{R}$. Alors la classe de cobordisme (non orienté) de $V(\mathbf{R}) = V(\mathbf{C})^{\mathbf{Z}/2}$ ne dépend que de x et l'homomorphisme $\mathrm{MU}^* \to \mathrm{MO}^*$ ainsi obtenu s'identifie bien à l'épimorphisme $L \to L/[2]$.

Nous obtenons également comme corollaire :

COROLLAIRE 1.3. – *Pour toute extension de corps* (*de caractéristique* 0) $k \to F$ *l'homomorphisme « extension des scalaires »* $\Omega^*(\mathrm{Spec}(k)) \to \Omega^*(\mathrm{Spec}(F))$ *est un isomorphisme.*

Pour toute variété X lisse sur k et irréductible, de corps des fractions $k(X)$, on dispose d'un homomorphisme $\Omega^*(X) \to \Omega^*(\mathrm{Spec}(k(X)))$ « fibre générique ». D'après le théorème 1.1, $\Omega^*(\mathrm{Spec}(k(X)))$ s'identifie à L et l'on note $\delta : \Omega^*(X) \to L$ l'homomorphisme ainsi obtenu dont on note $\widetilde{\Omega}^*(X)$ le noyau ; δ est un inverse à gauche de $\Omega^*(\mathrm{Spec}(k)) \to \Omega^*(X)$ et le L-module $\Omega^*(X)$ s'identifie donc à $L \oplus \widetilde{\Omega}^*(X)$. Si $f : Y \to X$ est un morphisme projectif de pure codimension, on appelle *degré* de f l'élément $\delta(f) \in L$. C'est bien le degré de f défini par Rost [7]. Si f n'est pas dominant $\deg(f) = 0$ et si $\dim(Y) = \dim(X)$ et f est dominant le degré de f est bien le degré de l'extension $k(X) \subset k(Y)$ (observer que $L^0 = \mathbf{Z}$).

Observons que, par construction même, l'élément $[f] - \delta(f) \cdot [\mathrm{Id}_X]$ est dans $\widetilde{\Omega}^*(X)$.

2. La formule du degré de Rost

THÉORÈME 2.1 (La formule du degré). – *Soit* $f : Y \to X$ *un morphisme projectif de pure codimension entre* k*-variétés lisses, avec* X *irréductible. Alors l'élément* $[f] - \delta(f) \cdot [\mathrm{Id}_X]$ *s'écrit, dans* $\Omega^*(X)$ *comme une somme finie de la forme* :

$$[f] - \delta(f) \cdot [\mathrm{Id}_X] = \sum_\alpha \omega_\alpha \cdot [Z_\alpha \to X],$$

avec, pour chaque α, ω_α *un élément homogène de* L, Z_α *lisse sur* k, *irréductible et* $\dim(Z_\alpha) < \dim(X)$ *et* $Z_\alpha \to X$ *un morphisme projectif définissant un morphisme birationnel de* Z_α *sur son image dans* X.

On procède par récurrence sur $\dim(X)$. Pour $\dim(X) = 0$ c'est essentiellement le théorème 1.1. En général, le fait que $[f] - \delta(f) \cdot [\mathrm{Id}_X]$ s'annule « génériquement » signifie qu'il s'annule par restriction à un ouvert dense de X. Le théorème de localisation [5] et le théorème 1.1 permettent alors de conclure la récurrence.

Dans le cas où $\delta(f) = 1$ on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.2. – *Soit* $Y \to X$ *un morphisme projectif birationnel avec* X *et* Y *lisses irréductibles. Alors l'élément* $[Y \to X] - [\mathrm{Id}_X]$ *s'écrit, dans* $\Omega^0(X)$ *comme une somme finie de la forme* :

$$[Y \to X] - [\mathrm{Id}_X] = \sum_\alpha \omega_\alpha \cdot [Z_\alpha \to X],$$

avec, pour chaque α, ω_α *un élément homogène de* L *de degré strictement négatif,* Z_α *lisse sur* k, *irréductible* (*et* $\dim(Z_\alpha) < \dim(X)$) *et* $Z_\alpha \to X$ *un morphisme projectif.*

Une forme affaiblie du théorème 2.1 fournit l'énoncé suivant, qui est l'analogue du théorème principal de [9] :

COROLLAIRE 2.3. – *Pour toute variété X lisse sur k et irréductible, le L-module $\widetilde{\Omega}^*(X)$ est engendré par les éléments de degré strictement positifs, autrement dit par les classes des morphismes projectifs $Y \to X$ avec Y lisse et* $\dim(Y) < \dim(X)$.

Soit X une k-variété projective lisse de dimension d. Rost introduit dans [7] l'ideal $M(X) \subset L = \Omega^*(\mathrm{Spec}(k))$ engendré par les classes $[Y] \in L$ des variétés projectives lisses Y de dimension $< d$ pour lesquelles il existe un k-morphisme $Y \to X$.

Les deux énoncés suivants (théorèmes 2.4 et 2.6) avaient été conjecturés par Rost [7] :

THÉORÈME 2.4. – *Pour toute k-variété projective lisse X l'idéal $M(X)$ est stable par les opérations de Landweber–Novikov* (voir [2,9] *pour la définition des opérations de Landweber–Novikov sur l'anneau de cobordisme complexe des variétés différentiables*).

Ce résultat s'établit à l'aide de la propriété d'universalité du cobordisme algébrique [5] en définissant les opérations de Landweber–Novikov par la méthode de Quillen [9] et en observant, à l'aide du théorème 2.1, le :

LEMME 2.5. – *L'idéal $M(X) \subset L$ est l'image par l'homomorphisme de Gysin associé à $\pi : X \to \mathrm{Spec}(k)$:*

$$\pi_* : \Omega^*(X) \longrightarrow \Omega^{*-2d}\big(\mathrm{Spec}(k)\big),$$

du sous-L-module $\widetilde{\Omega}^*(X)$.

THÉORÈME 2.6. – *Pour tout morphisme $f : Y \to X$ entre deux k-variétes projectives lisses irréductibles de pures dimensions, alors*

$$[Y] - \delta(f) \cdot [X] \in M(X).$$

Ce théorème résulte du théorème 2.1 en utilisant le morphisme de Gysin associé à $\pi : X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le lemme précédent.

Soient d un entier $\geqslant 1$ et N_d le $d^{\text{ième}}$ polynôme de Newton en les variables $C_1, \ldots, C_d$. Rappelons que si les $C_1, \ldots, C_d$ sont les d premières fonctions symétriques élémentaires en les X_i, on a $\mathrm{N}_d(C_1, \ldots, C_d) = \sum_i X_i^d$. Si ξ est un fibré vectoriel de rang r sur une k-variété lisse X et $\mathrm{c}_1(\xi), \ldots, \mathrm{c}_r(\xi)$ ses classes de Chern en théorie de Chow on pose $\mathrm{S}_d(\xi) = \mathrm{N}_d(\mathrm{c}_1(\xi), \ldots, \mathrm{c}_d(\xi)) \in \mathrm{CH}^d(X)$. On voit immédiatement que $\mathrm{S}_d(\xi \oplus \eta) = \mathrm{S}_d(\xi) + \mathrm{S}_d(\eta)$.

Si de plus X est projective et de dimension d, on pose $s_d(X) := \deg \mathrm{S}_d(\tau_X) \in \mathbf{Z}$, τ_X désignant le fibré tangent de X et $\deg : \mathrm{CH}^d(X) \to \mathbf{Z}$ l'homomorphisme degré usuel. On déduit facilement de ce qui précède que si X et Y sont deux k-variétés projectives lisses de dimension d et d', on a $s_{d+d'}(X \times Y) = 0$ si $d > 0$ et $d' > 0$. Autrement dit, l'homomorphisme $s_d : L^{-d} \to \mathbf{Z}$ induit par s_d s'annule sur les éléments décomposables.

À l'aide du théorème 2.1, on obtient immédiatement le résultat suivant (en observant que $s_d(\omega_\alpha \cdot [Z_\alpha]) \neq 0$ implique $\dim(Z_\alpha) = 0$) :

Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre deux variétés projectives lisses de dimension $d \in \mathbf{N}$. Alors il existe un 0-cycle de la forme $\sum_\alpha s_d(\omega_\alpha) \cdot z_\alpha$, dans lequel les z_α sont des points fermés de X, et dont le degré $\sum_\alpha s_d(\omega_\alpha) \cdot [\kappa(x_\alpha) : k]$ est égal à l'entier $s_d(Y) - \deg(f) \cdot s_d(X)$.

Lorsqu'il existe un nombre premier p et un entier $n \geqslant 1$ tels que $d = p^n - 1$ on montre [2,8] que $s_d(X)$ est toujours divisible par p. Sous cette hypothèse on peut donc diviser par p l'énoncé précédent et l'on obtient le résultat suivant[3] [7] :

COROLLAIRE 2.7. – *Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre deux variétés projectives lisses de dimension $d \in \mathbf{N}$. Supposons qu'il existe existe un nombre premier p et un entier n tels que $d = p^n - 1$. Alors il existe*

S0764-4442(01)01833-X/FLA AID:1833 Vol.332(0) P.5 (1-6)
CRAcad 2001/04/12 Prn:13/04/2001; 14:21 F:PXMA1833.tex by: p. 5

un 0*-cycle* (*à coefficients entiers*) *sur* X*, dont le degré est égal à l'entier*

$$\frac{s_d(Y)}{p} - \deg(f) \cdot \frac{s_d(X)}{p}.$$

Remarque 2.8. – Le théorème 3.1 permet également de retrouver la formule du degré d'ordre supérieur établie dans [3].

3. Comparaison avec l'anneau de Chow et le K_0

Dans l'énoncé suivant, **Z** est muni de la loi de groupe additive.

THÉORÈME 3.1. – *Pour toute variété* X *lisse sur* k*, l'homomorphisme évident* $\Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z} \to \mathrm{CH}^*(X)$ *est un isomorphisme* (voir [5]).

L'idée de la démonstration est la suivante. Soit $Z \subset X$ un sous-schéma fermé irréductible. Choisissons une résolution $\widetilde{Z} \to Z$ (*cf.* [4]), autrement dit un morphisme projectif birationnel avec $\widetilde{Z}$ lisse sur k. À l'aide du corollaire 2.2 (et de [4]) on voit que la classe de $[\widetilde{Z} \to X] \in \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}$ ne dépend que de Z. On définit ainsi un homomorphisme « canonique » $Z^*(X) \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}$, $Z^*(X)$ désignant le groupe abélien libre de base les sous-schémas fermés irréductibles de X que l'on gradue par la codimension. On vérifie ensuite à l'aide du théorème 2.1 que cet homomorphisme est surjectif et que l'homomorphisme composé $\mathcal{M}^*(X)^+ \to \Omega^*(X) \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}$ est égal au composé $\mathcal{M}^*(X)^+ \to Z^*(X) \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}$ dans lequel l'homomorphisme $\mathcal{M}^*(X)^+ \to Z^*(X)$ envoie $[f : Y \to X]$ sur 0 si $\dim(f(Y) \neq \dim(Y)$ et sur $[k(Y) : k(f(Y))] \cdot f(Y)$ si $\dim(f(Y)) = \dim(Y)$.

On remarque ensuite que le sous-groupe $\mathcal{R}(X) \subset Z(X)$ des relations qui définissent l'anneau de Chow de X (autrement dit, les équivalences rationnelles) est envoyé sur le sous-groupe trivial par l'homomorphisme $Z^*(X) \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}$ comme cela résulte de l'invariance par homotopie. On obtient ainsi un homomorphisme (surjectif) $\mathrm{CH}^*(X) \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}$, dont le composé avec $\Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z} \to \mathrm{CH}^*(X)$ est l'identité. Ce qui achève la démonstration. $\square$

Une filtration du cobordisme algébrique. – Soient X une k-variété lisse et $n \geqslant 0$ un entier. On définit le sous-groupe gradué $F^{(n)}(\Omega^*(X))$ comme le sous-groupe engendré par les classes $[f : Y \to X]$ telles que Y est irréductible et $\dim(Y) - \dim(f(Y)) \geqslant n$. On note $L_{\geqslant 1} \subset L$ l'idéal d'augmentation[4] de L, $L_{\geqslant n}$ sa puissance $n^{\text{ième}}$. Enfin, on note $I^*(X) \subset \Omega^*(X)$ le noyau de l'homomorphisme $\Omega^*(X) \to \mathrm{CH}^*(X)$.

THÉORÈME 3.2. – *Pour toute* k*-variété lisse* X *on a* $F^{(1)}(\Omega^*(X)) = I^*(X)$ *et tout entier* $n \geqslant 0$*, on a* :

$$F^{(n)}\big(\Omega^*(X)\big) = L_{\geqslant n} \cdot \Omega^*(X).$$

Le théorème 3.1 fournit l'égalité $L_{\geqslant 1} \cdot \Omega^*(X) = I^*(X)$. Comme on a clairement la suite d'inclusions $L_{\geqslant 1} \cdot \Omega^*(X) \subset F^{(1)}(\Omega^*(X)) \subset I^*(X)$ on obtient le premier énoncé. Les inclusions $L_{\geqslant n} \cdot \Omega^*(X) \subset F^{(n)}(\Omega^*(X))$ sont claires et enfin les inclusions $F^{(n)}(\Omega^*(X)) \subset L_{\geqslant n} \cdot \Omega^*(X)$ se démontrent à l'aide du théorème 2.1.

COROLLAIRE 3.3. – *Pour tout couple* (n, m) *d'entiers on a*

$$F^{(n)}\big(\Omega^*(X)\big) \cdot F^{(m)}\big(\Omega^*(X)\big) \subset F^{(n+m)}\big(\Omega^*(X)\big).$$

En effet, on a les inclusions $L_{\geqslant n} \cdot L_{\geqslant m} \subset L_{\geqslant n+m}$.

Notons $\mathrm{Gr}^*(\Omega^*(X))$ le gradué associé à la filtration que nous venons de construire. Cette filtration est multiplicative et $\mathrm{Gr}^*(\Omega^*(X))$ est une algèbre bigraduée commutative sur $\mathrm{CH}^*(X) = \mathrm{Gr}^0(\Omega^*(X))$. On observe de plus que $\mathrm{Gr}^*(\Omega^*(X))$ est une L-algèbre bigraduée : en effet, la filtration construite sur $\Omega^*(X)$ est contravariante en X pour les morphismes lisses équidimensionnels. On conclut en observant que $\mathrm{Gr}^*(\Omega^*(\mathrm{Spec}(k))) = L$ (attention à la bigraduation !).

On obtient alors :

COROLLAIRE 3.4. – *Pour toute k-variété lisse X l'homomorphisme d'anneaux bigradués*

$$\Phi_X : L \otimes \mathrm{CH}^*(X) \longrightarrow \mathrm{Gr}^*\big(\Omega^*(X)\big)$$

est surjectif.

Remarque 3.5. – On peut établir que $\Phi_X \otimes \mathbf{Q}$ est toujours un isomorphisme. En revanche, en général Φ_X n'a aucune raison d'être un isomorphisme.

Lien avec le K_0. – Dans l'énoncé suivant, $\mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}]$ est muni de la loi de groupe multiplicative.

THÉORÈME 3.6. – *Pour toute variété X lisse sur k, l'homomorphisme évident* :

$$\Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}\big[\beta;\beta^{-1}\big] \longrightarrow K_0(X)\big[\beta;\beta^{-1}\big]$$

est un isomorphisme.

Pour la démonstration, on considère l'application $K_0(X) \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}]$, $\xi \mapsto 1 - \mathrm{c}_1(\xi^\vee)\cdot\beta$. Observer que $1 - \mathrm{c}_1(\xi^\vee)\beta = \sum_{i \geqslant 0}(\beta \cdot \mathrm{c}_1(\xi))^i$. C'est bien sûr un homomorphisme de groupes abéliens. Mais en utilisant la loi de groupe formelle (multiplicative à l'arrivée) on constate que c'est un homomorphisme d'anneaux, et, de plus, que cet homomorphisme définit un morphisme de théories cohomologiques orientées,[5] $K_0(X)[\beta;\beta^{-1}] \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}]$.

Le composé $K_0(X)[\beta;\beta^{-1}] \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}] \to K_0(X)[\beta;\beta^{-1}]$ est l'identité. Et le composé $\Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}] \to K_0(X)[\beta;\beta^{-1}] \to \Omega^*(X) \otimes_L \mathbf{Z}[\beta;\beta^{-1}]$ l'est aussi, d'où l'affirmation.

---

[1] les démonstrations détaillées paraîtront dans [6].

[2] On peut observer que cet homomorphisme est indépendant de σ car d'après Milnor [8], deux variétés presque complexes ont même image dans MU^* si et seulement tous leurs nombres caractéristiques de Chern sont égaux. Or pour toute variété projective lisse X sur k, les nombres caractéristiques de Chern de $X_\sigma(\mathbf{C})$ ne dépendent que de X, d'où l'affirmation.

[3] Sous cette forme ce résultat est dû à M. Rost. Auparavant, V. Voevodsky avait considéré des énoncés plus faibles.

[4] C'est l'idéal engendré par les classes des k-variétés de dimension > 0.

[5] on doit utiliser ici le théorème de Riemann–Roch.

Références bibliographiques

[1] Abramovich D., Karu K., Matsuki K., Wlodarczyk J., Torification and factorization of birational morphisms, Preprint 2000, AG/9904135.

[2] Adams J.F., Stable Homotopy and Generalised Homology, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1974.

[3] Borghesi S., Algebraic Morava K-theories and the higher degree formula, Preprint, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0412/index.html.

[4] Hironaka H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, Ann. of Math. 79 (2) (1964) 109–203; ibid. 79 (2) (1964) 205–326.

[5] Levine M., Morel F., Cobordisme algébrique I, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2001) (à paraître).

[6] Levine M., Morel F., Algebraic cobordism (en préparation).

[7] Merkurjev A., Degree formula, available at http://www.math.ohio-state.edu/˜rost/chain-lemma.html.

[8] Milnor J.W., On the cobordism ring $\Omega^*(X)$ and a complex analogue, Amer. J. Math. 82 (1960) 505–521.

[9] Quillen D.G., Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Adv. in Math. 7 (1971) 29–56.