2.8 KURVENINTEGRALE UND STAMMFUNKTIONEN

Im folgenden seien X normierter Vektorraum und Y B-Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir wollen in diesem Kapitel für stetige Abbildungen

$$f : X \supset D_f \to \mathcal{B}(X;Y)$$

und stückweise stetig-diff'bare Kurven

$$y : [\alpha, \beta] \to X \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha < \beta),$$

welche in D_f verlaufen, d.h.

$$W_y = \{\, y(t) \ | \ t \in [\alpha, \beta]\,\} \subset D_f$$

erfüllen, das Kurvenintegral über f längs y definieren.

(1) BEMERKUNG, DEFINITION: *Für stetiges f und stetig-diff'bares y ist*

$$[\alpha, \beta] \ni t \to f(y(t))\, y'(t) \in Y \ \textit{stetig},$$

so daß man wegen **2.7** (5) (iii)

$$\int_y f := \int_\alpha^\beta f(y(t))\, y'(t)\, dt \ \in Y$$

definieren kann. Ist y nur stückweise stetig-diff'bar, so wählt man eine beliebige Zerlegung $\zeta = (t_0, \ldots, t_n) \in \mathcal{Z}[\alpha, \beta]$, so daß für $\nu = 1, \ldots, n$ jeweils $y_\nu := y|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ stetig-diff'bar ist, und definiert hiermit

$$\int_y f \ := \sum_{\nu=1}^n \int_{y_\nu} f \ = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} f(y(t))\, y_\nu'(t) dt\,.$$

Diese Definition ist aufgrund **2.7** (2) (vi) *von ζ unabhängig. Wir bezeichnen jeweils $\int_y f$ als "Kurvenintegral über f längs der (stückweise) stetig-diff'baren Kurve y".*

Rechenregeln für das Kurvenintegral ergeben sich unmittelbar aus entsprechenden Rechenregeln in **2.7** . Wir können und wollen hier auf eine ausführliche Darstellung verzichten und beschränken uns auf die Notierung der entsprechenden Integralabschätzung.

(2) INTEGRALABSCHÄTZUNG: *Mit der Kurvenlänge $\lambda(y)$ von y gilt*

$$\left| \int_y f \right| \le \lambda(y) \cdot \max\{\, |\, f(x)\,| \ | \ x \in W_y \,\}\,.$$

Für $a, b \in X$ haben wir die durch

$$y : [0,1] \ni t \to (1-t)\, a + t\, b \in X$$

definierte stetig-diff'bare Kurve als die *Strecke* $\overline{ab}$ bezeichnet.
Verläuft $\overline{ab}$ in D_f, gilt also $[a,b] := \{(1-t)\, a + t\, b \mid t \in [0,1]\} \subset D_f$, so folgt

$$\int_{\overline{ab}} f \;=\; \int_0^1 f((1-t)a+tb)\,(b-a)\,dt\,.$$

Mit **2.7** (9) erhält man unmittelbar

$$\int_{\overline{ba}} f \;=\; -\int_{\overline{ab}} f\,.$$

Weiterhin bezeichnen wir für $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ und $a_0, \ldots, a_n \in X$ die durch

$$y(t) := (\nu - t)\, a_{\nu-1} + (t - \nu + 1)\, a_\nu \qquad (t \in [\nu-1, \nu];\ \nu = 1, \ldots, n)$$

definierte, stückweise stetig-diff'bare Kurve $y : [0,n] \to X$ als *den Polygonzug* $\overline{a_0 \ldots a_n}$. (Vgl. auch **2.1** (9) (ii).) Verläuft dieser in D_f, so folgt (mit Hilfe von **2.7** (9))

$$\int_{\overline{a_0 \ldots a_n}} f \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\overline{a_{\nu-1}\, a_\nu}} f \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} -\int_{\overline{a_\nu\, a_{\nu-1}}} f \;=\; -\int_{\overline{a_n \ldots a_0}} f\,.$$

Ist f Ableitung einer Abbildung F, so können wir in Analogie zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **2.7** (4) einen Zusammenhang zwischen dem Kurvenintegral über f und der Abbildung F herstellen.

(3) HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG:
Es sei $F : X \supset D_F \to Y$ stetig-diff'bar mit $F' = f$. ($\Rightarrow\ D_F = D_f$).
Weiter sei $y : [\alpha, \beta] \to X$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ eine stückweise stetig-diff'bare Kurve, die in D_f von $a := y(\alpha)$ nach $b := y(\beta)$ verläuft. Dann gilt

$$\int_y f \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Insbesondere gilt im Fall $a = b$, also für eine geschlossene Kurve y

$$\int_y f \;=\; 0.$$

Der vorstehende Satz kann einmal bei bekanntem F dazu dienen, Kurvenintegrale über die Funktion $f = F'$ auszurechnen. Insbesondere zeigt sich, daß diese in der gegebenen Situation nicht explizit von der jeweiligen Kurve y abhängen, sondern nur von deren Anfangs- und Endpunkt.

Der vorstehende Satz kann zum anderen aber auch bei unbekannter Abbildung F dazu dienen, diese mit Hilfe von Kurvenintegralen auszurechnen. Wir werden uns im folgenden insbesondere mit dem letzten Aspekt befassen.

(4) DEFINITION:
Es seien X, Y normierte Vektorräume, $f : X \supset D_f \to \mathcal{B}(X;Y)$ und $D_f \supset D$ offen. Wir bezeichnen dann jede diff'bare Abbildung

$$F : X \supset D \to Y \ \textit{mit} \ F'(x) = f(x) \quad (x \in D)$$

als Stammfunktion zu f auf D. Ist insbesondere $D_f = D$, so heißt F Stammfunktion zu f.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion f.

Die Eindeutigkeitsfrage wird schon in **2.2** (15) beantwortet.

(5) BEMERKUNG: *Es sei $D_f \supset D$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend). Sind dann $F_j : X \supset D \to Y \quad (j = 1, 2)$ Stammfunktionen zu f auf D, so ist $F_1 - F_2$ konstant. (Es genügt hier, daß Y normierter Vektorraum ist!)*

Eine Antwort auf die Existenzfrage ist komplizierter.

Zunächst ein Beispiel einer stetigen Abbildung f, die keine Stammfunktion besitzt.

(6) BEISPIEL: *Es sei*

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} =: D_f \ni x = (x_1, x_2) \to \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1) \in \mathbb{R}^{1\times 2} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

Für die stetig-diff'bare Kurve

$$y(t) := (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

erhält man

$$\int_y f \ = 2\pi \neq 0 .$$

Folglich besitzt f nach (3) keine Stammfunktion auf D_f.

Andererseits verifiziert man sofort, daß f lokal Stammfunktionen besitzt.
So sind jeweils $F_1(x_1,x_2) := \arctan\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big)$ *auf* $D_1 := \{(x_1,x_2) \mid x_1 \neq 0\}$ *und*
$F_2(x_1,x_2) := -\arctan\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big)$ *auf* $D_2 := \{(x_1,x_2) \mid x_2 \neq 0\}$ *Stammfunktionen zu* f.

Beispiel (6) zeigt, daß eine Abbildung $f : X \supset D_f \to \mathcal{B}(X;Y)$ global – d.h. auf D_f – keine Stammfunktion zu besitzen braucht, obwohl sie lokal – d.h. für jeden Punkt $a \in D_f$ auf einer gewissen Umgebung von a – sehr wohl Stammfunktionen besitzt. Die Existenz einer globalen Stammfunktion hängt somit nicht nur von lokalen Eigenschaften von f ab, sondern auch von der topologischen Struktur des Definitionsbereiches D_f.

Wir behandeln im folgenden die Existenzfrage für "einfache" Definitionsbereiche D_f. Im wesentlichen diskutieren wir hier eine lokale Situation.

(7) DEFINITION, BEMERKUNG: *Es seien* $X \supset D$ *offen und* $a \in D$.
(i) D *heißt Sterngebiet bzgl.* a $\iff \forall\, x \in D : \overline{ax}$ *verläuft in* D.
Ein Sterngebiet bzgl. a *ist nach* **1.5.2** (19) (ii) *zusammenhängend, also ein Gebiet.*

(ii) *Man bezeichnet*

$$S(a;D) := \{x \in D \mid \overline{ax} \text{ verläuft in } D\}$$

als Mittag-Leffler-Stern bzgl. a *in* D. $S(a;D)$ *ist offenbar das größtmögliche in* D *gelegene Sterngebiet bzgl.* a .

Wir zeigen nun leicht

(8) SATZ: *Es seien* f *stetig,* $a \in D_f$ *und* D_f *ein Sterngebiet bzgl.* a.
Weiter gelte für alle Punkte $b, c \in D_f$ *mit* $[b,c] \subset D_f$

$$\int_{\overline{abca}} f = 0\,.$$

Dann definiert

$$F(x) := \int_{\overline{ax}} f \qquad (x \in D_f)$$

eine Stammfunktion zu f.

Gemäß (3) ist die Bedingung in (8) auch notwendig für die Existenz einer Stammfunktion.

Der folgende Satz beinhaltet schließlich eine wichtige, leicht nachprüfbare hinreichende Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion.

(9) SATZ: *Es gelte*

(i) D_f *Sterngebiet (bzgl. eines beliebigen* $a \in D_f$*)*
(ii) f *diff'bar*
(iii) $\forall\, x \in D_f \,:\, f'(x) \in \mathcal{B}_2(X;Y)$ *symmetrisch.*

Dann besitzt f *eine Stammfunktion (auf* D_f*).*

Aufgrund des Satzes von Schwarz **2.5** (1) ist unter Voraussetzung von (9) (ii) die Bedingung (9) (iii) für die Existenz einer Stammfunktion auch notwendig.

(10) BEMERKUNG: *Es seien* $X = \mathbb{K}^n$ *und* $f : \mathbb{K}^n \supset D_f \to \mathcal{B}(\mathbb{K}^n;Y)$ *in* a *diff'bar. Dann sind die* $f_\nu : \mathbb{K}^n \supset D_f \ni x \to f(x)e_\nu \in Y$ *für* $\nu = 1,\ldots,n$ *in* a *diff'bar, und es gilt*

$$f'(a) \text{ symmetrisch } \Leftrightarrow \forall\, \nu,\mu = 1,\ldots,n \,:\, \partial_\mu\, f_\nu(a) = \partial_\nu\, f_\mu(a).$$

Ein wichtiger Spezialfall von (9) ist die folgende "lokale" Version des Cauchy'schen Integralsatzes.

(11) CAUCHY'SCHER INTEGRALSATZ: *Es seien* Y *B-Raum über* $\mathbb{C}$*,*

$$f : \mathbb{C} \supset D_f \to Y \textit{ (komplex) diff'bar}$$

und D_f *Sterngebiet (bzgl. eines Punktes* $a \in D_f$*). Dann gilt für alle Punkte* $b, c \in D_f$ *und je zwei in* D_f *von* b *nach* c *verlaufende stückweise stetig-diff'bare Kurven* y_1, y_2

$$\int_{y_1} f \;=\; \int_{y_2} f\,.$$

Insbesondere gilt für jede geschlossene in D_f *verlaufende stückweise stetig-diff'bare Kurve* y

$$\int_y f \;=\; 0\,.$$