Dieser Übersichtsartikel gibt Auskunft über schwarze Löcher in der Allgemeinen Relativitätstheorie und diskutiert ihre Eigenschaften aus mathematischer Sicht. Zu den behandelten Themen gehören Eindeutigkeitssätze für schwarze Löcher, quantenmechanische Effekte, die Thermodynamik schwarzer Löcher, kosmische Zensur, der Gravitationskollaps sowie die Existenz und Stabilität von Lösungen der relevanten Gleichungen.

Einsteins Erbe

Mathematische Einblicke in schwarze Löcher

Von Markus Kunze

Als Einstein im Jahre 1915 die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie aufstellte, waren deren Auswirkungen auf die Physik nur zu einem kleinen Teil absehbar. Die Einstein-Gleichungen beschreiben auf komplizierte Art und Weise die Wechselwirkung des Gravitationsfeldes (Schwerefeldes) mit der vorhandenen Materie. Je nachdem, wie diese Materie modelliert wird, bekommt man dann verschiedene Systeme von Gleichungen. Einige der bekanntesten Materie-Modelle sind:

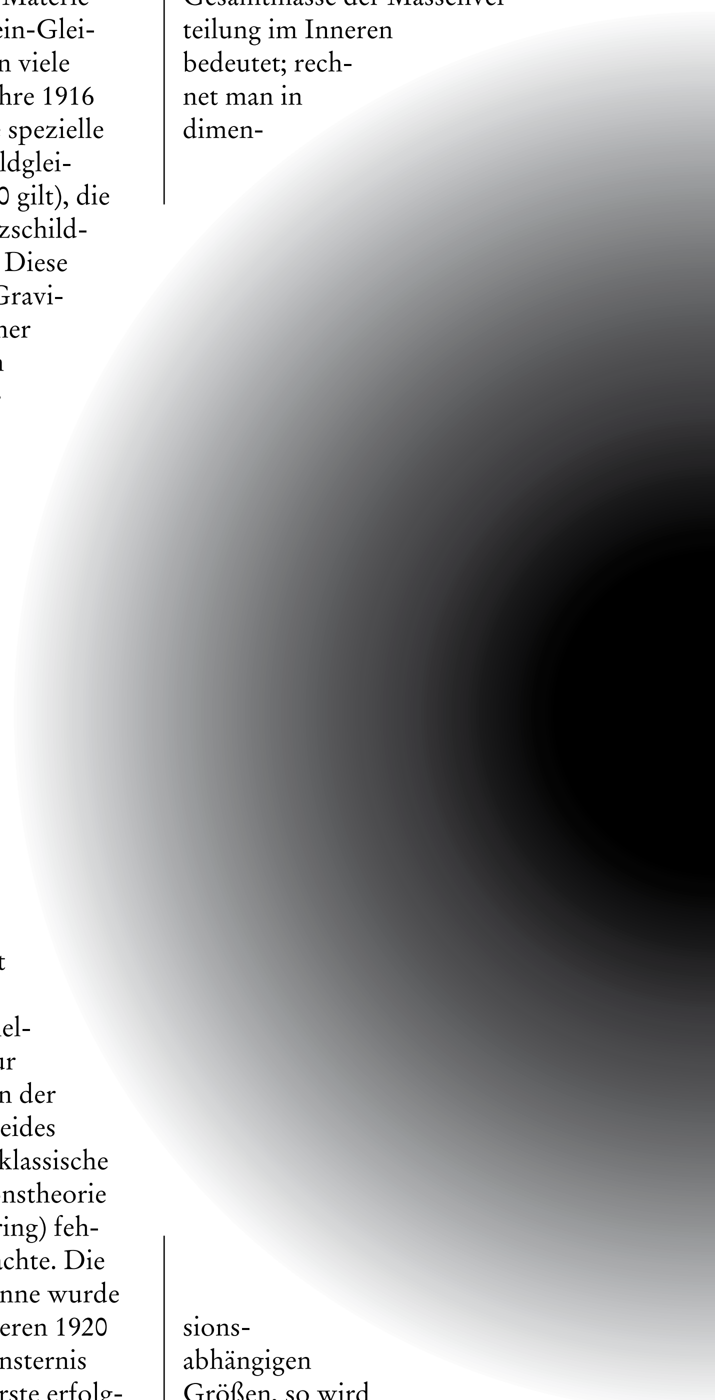
- Die Vakuum-Feldgleichungen (keine Materie),
- Das skalare Feld (Materie als Wellen),
- Modelle mit elektrischer Ladung,
- Hydrodynamische Modelle (Materie als Flüssigkeit),
- Kinetische Modelle (Materie als Ensemble von Teilchen).

Insbesondere hat aufgrund der Einstein-Gleichungen die Materie Auswirkungen auf das Gravitationsfeld und damit auf die Geometrie des Raumes. Wenn man nun die Einstein-Gleichungen mit mathematischen Methoden untersuchen will, so hat diese Tatsache unmittelbare Konsequenzen für die Analyse. Zur Erläuterung sei zunächst bemerkt, dass man bei klassischen Problemen (etwa den Gleichungen für die Aus-

Markus Kunze. Foto: Klaus Lemke

breitung von Wellen oder den Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik) oft Lösungen in Form einer Funktion u sucht, welche von einer eindimensionalen Zeitvariablen t und einer dreidimensionalen Ortsvariablen x abhängen, was insgesamt einen vierdimensionalen flachen (t, x)-Raum ergibt, der eine sehr einfache Geometrie hat. Hierbei soll flach bedeuten, dass in keiner Zeit- oder Raumrichtung eine Krümmung vorliegt. Ist zum Beispiel der Ortsraum für x nur eindimensional, so ist der resultierende zweidimensionale (t, x)-Raum die (flache) Ebene. Die Situation bei den Einstein-Gleichungen ist nun ungleich komplizierter, denn die Bestimmung der zugrundeliegenden Geometrie des Raumes ist Teil der Lösung, welche dann zunächst aus einer so genannten Raumzeit-Mannigfaltigkeit M und einer Metrik g (Geometrie) auf dieser Mannigfaltigkeit besteht. Durch das Materie-Modell kommen dann weitere unbekannte Funktionen ins Spiel, die geeignete Gleichungen erfüllen müssen, in die M und g wiederum eingehen; auf diese Weise hat dann umgekehrt also auch das Gravitationsfeld Auswirkungen auf die Materie und man erhält ein stark nichtlinear gekoppeltes System. In den obigen Beispielen der klassischen Probleme wäre die Mannigfaltigkeit M der vierdimensionale Raum und die Metrik g die flache Metrik, nämlich die der üblichen Abstandsmessung. In den meisten Fällen von Lösungen der Einstein-Gleichungen ist die Metrik g aber nicht die flache, was grob gesagt dazu führt, dass M eine komplizierte Struktur mit vielen Bergen und Tälern haben kann. Insbesondere kann M im Allgemeinen nicht einfach in zeitliche und räumliche Koordinaten aufgeteilt werden, was zu dem Begriff der Raumzeit geführt hat. Sind M und g einmal bestimmt, so kann man daraus den so genannten Riemann'schen Krümmungstensor (ein geometrisches Objekt) berechnen, und mit dessen Hilfe dann den Einstein-Tensor $G_{\alpha\beta}$. Die dimensionslosen Einstein-Gleichungen lauten dann $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$, wobei $T_{\alpha\beta}$ den Materie-Tensor, also das gewählte Materie-Modell, beschreibt.

Für ein betrachtetes Materie-Modell haben die Einstein-Gleichungen im Allgemeinen viele Lösungen. Bereits im Jahre 1916 fand Schwarzschild eine spezielle Lösung der Vakuum-Feldgleichungen (wo also $T_{\alpha\beta} = 0$ gilt), die später nach ihm Schwarzschild-Lösung genannt wurde. Diese Lösung beschreibt das Gravitationsfeld außerhalb einer statischen und sphärisch symmetrischen Massenverteilung. Umgekehrt konnte später gezeigt werden (Satz von Birkhoff, 1923), dass sogar jede Vakuum-Lösung außerhalb einer (nicht notwendig statischen) sphärisch symmetrischen Massenverteilung bereits durch eine Schwarzschild-Lösung beschrieben werden kann. Die Schwarzschild-Lösung besitzt einige, zum Teil sehr überraschende, Eigenschaften. Zunächst konnten mit ihrer Hilfe unter anderem die Perihelverschiebung des Merkur und die Lichtbeugung an der Sonne erklärt werden, beides Phänomene, für die die klassische Newton'sche Gravitationstheorie (wenn auch nur sehr gering) fehlerhafte Voraussagen machte. Die Lichtbeugung an der Sonne wurde von Eddington und anderen 1920 während einer Sonnenfinsternis gemessen und war der erste erfolgreiche experimentelle Test der Allgemeinen Relativitätstheorie. Aufgrund der speziellen Form der Schwarzschild-Metrik sieht man auch, dass diese Metrik weit außen gegen den flachen Raum strebt, das heißt die Raumzeit ist, was asymptotisch flach genannt wird. Es zeigt sich ferner, dass die Metrik singulär wird bei zwei Werten der radialen Koordinate r, nämlich bei $r_0 = 0$ und bei dem so genannten Schwarzschild-Radius $r_S = 2m$, wobei m die Gesamtmasse der Massenverteilung im Inneren bedeutet; rechnet man in dimen-



sionsabhängigen Größen, so wird $r_S = 2Gm/c^2 \approx 3(m/m^-)$km mit der Gravitationskonstante G, der Lichtgeschwindigkeit c und der Sonnenmasse $m^- \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg. Für Körper wie die Sonne oder die Erde ist r_s also höchstens von der Größe einiger Kilometer, so dass der Radius *innerhalb* des betrachteten

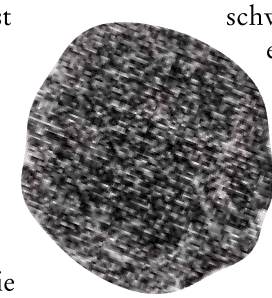
Körpers liegt, wo die Schwarzschild-Lösung ihre Gültigkeit verliert. Ist jedoch die Gesamtmasse *m* sehr groß, so wird r_s aber außerhalb des Körpers liegen, womit die Schwarzschild-Lösung gültig bleibt. Es zeigte sich, dass entsprechende Situationen im Kosmos durchaus vorkommen, etwa im Zentrum von Galaxien oder bei Doppelsternsystemen. Man kann dann nachrechnen, dass Photonen, welche im Innenbereich $r < r_S$ emittiert werden, niemals in den Außenbereich $r \geq r_S$ gelangen können, also innerhalb von $r < r_S$ aufgrund der hohen Gravitation gefangen bleiben. In anderen Worten: Ein innerhalb von r_S ausgesandter Lichtstrahl ist *außerhalb* von r_S nicht sichtbar. Umgekehrt durchquert ein auf einem Lichtstrahl von außerhalb mitbewegter Beobachter den Schwarzschild-Radius r_S in endlicher (Eigen-) Zeit. Der Innenbereich $r < r_S$ und der Außenbereich $r \geq r_S$ werden getrennt von einer Ereignishorizont genannten Fläche, die wie eine nur einseitig durchlässige Membran wirkt. Für diese Situation prägte 1967 der Physiker John Archibald Wheeler (der Lehrer von Feynman, vgl. u. a. Wheeler[1]) den Begriff des schwarzen Lochs, das schwarz genannt wird, weil aus ihm kein Licht nach außen dringen kann.

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt nur den Außenbereich $r > r_S$. Man kann nun zeigen, dass es möglich ist andere Koordinaten zu finden (so genante Kruskal-Koordinaten), welche die Schwarzschild-Lösung umfassen und sogar für $0 < r < \infty$ definiert sind. Insbesondere ist die Singularität der Metrik bei $r_S = 2m$ keine echte geometrische, sondern nur bedingt durch die Wahl der Koordinaten. Im Gegensatz dazu tritt bei $r_0 = 0$ eine Singularität geometrischer Natur auf, das heißt eine solche, die nicht einfach zurückzuführen ist auf die ungünstige Wahl der Koordinaten. Nach den Singularitäten-Sätzen von Penrose (1965) und Hawking/Penrose (1970) ist eine solche geometrische Singularität aber sogar unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an die Raumzeit und das Materie-Modell zu erwarten.

Schwarze Löcher, also Bereiche die durch Licht nur einseitig von außen zu erreichen sind, spielen nicht nur für die Vakuum-Feldgleichungen eine zentrale Rolle, sondern ebenso für andere Materie-Modelle. Aus mathematischer Sicht stellt wegen der hohen Komplexität der Einstein-Gleichungen sowohl der Nachweis der Existenz von schwarzen Löchern als auch die Diskussion ihrer Eigenschaften ein jeweils höchst anspruchsvolles Thema dar. Um zumindest gewisse Vereinfachungen in den Feldgleichungen zu erzielen, werden oft auch Spezialfälle untersucht, in denen über die Raumzeit zusätzliche Annahmen gemacht werden (zum Beispiel hinsichtlich der Symmetrien). Im Folgenden sollen nun einige bekannte mathematische und andere Ergebnisse schwarze Löcher und die Lösbarkeit der Einstein-Gleichungen betreffend kurz vorgestellt werden.

Das no-hair theorem (Glatzensatz)

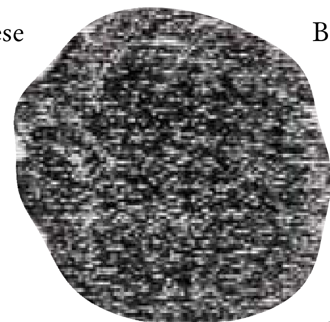
Die Schwarzschild-Lösung beschreibt eine statische und sphärisch symmetrische Situation und wird durch einen einzigen Parameter (die Gesamtmasse *m*) vollständig beschrieben. Nun treten schwarze Löcher oft auf als Endzustand nach dem Kollaps einer Massenverteilung unter ihrer eigenen Gravitation (so genannter Gravitationskollaps, siehe auch weiter unten). Je nachdem, welche Ausgangssituation vorlag und in welcher Form ein solcher Kollaps verläuft, scheint es auf den ersten Blick sehr viele Möglichkeiten zu geben, wie das entstehende schwarze Loch aussehen könnte. Jetzt zeigt aber ein allgemeines Ergebnis, dass dies in vielen relevanten Fällen gerade nicht so ist: Ein derartiges schwarzes Loch kann nämlich mit höchstens drei Parametern beschrieben werden, durch Gesamtmasse, Drehimpuls und elektrische Ladung. Mit anderen Worten: Jede zusätzliche und feinere strukturelle Information über die Raumzeit wird im Laufe der Entwicklung von der Ausgangssituation zum schwarzen Loch verloren gehen. Für diese Tatsache führte Wheeler den Begriff no-hair theorem (auf Deutsch: Glatzensatz) ein. Dieser bringt zum Ausdruck, dass ein schwarzes Loch nicht über feinere Strukturen (wie Haare) verfügt, sondern nur von den oben genannten (groben) Parametern abhängt. Solche Eindeutigkeitssätze für schwarze Löcher wurden zuerst von Werner Israel im Jahr 1967 und in der Folge von vielen anderen Autoren bewiesen. Das bislang beste Ergebnis, beruhend auf einer langen Folge von schwierigen Einzelschritten, besagt, dass jede ein isoliertes schwarzes Loch enthaltende asymptotische flache und stationäre Raumzeit mit elektrischer Ladung als Gravitationsquelle (beschrieben durch die Einstein-Maxwell-Gleichungen) durch einen Vertreter der dreiparametrigen Familie der so genannten Kerr-Newman-Lösungen gegeben ist; die relevanten Parameter sind gerade die Gesamtmasse, der Drehimpuls und die elektrische Ladung der Raumzeit. Ist die Raumzeit sogar statisch, dann genügen bereits die zwei Parameter Gesamtmasse und elektrische Ladung. In diesem Fall ist die Metrik ein Element der zweiparametrigen Familie der so genannten Reissner-Nordström-Lösungen, welche Spezialfälle der Kerr-Newman-Lösungen sind; verschwindet ferner auch die elektrische Ladung, so wird die Reissner-Nordström-Lösung wiederum zur Schwarzschild-Lösung mit einem Parameter. Die Abstrahlung von Gravitationswellen wird als der physikalische Grund dafür angesehen, dass eine Raumzeit ihre ursprünglich möglicherweise vorhandenen Haare (feineren Strukturen) in Laufe des Gravitationskollapses verliert. Solche Gravitationswellen können einerseits in den Weltraum oder andererseits in das entstehende schwarze Loch abgestrahlt werden. Beides wird dazu führen, dass die Raumzeit im Verlauf ihrer Evolution immer gleichmäßiger wird und so eine spezielle Endform annimmt. Das gerade beschriebene no-hair theorem ist als mathematische Aussage der Art „wenn die Gleichung ... eine Lösung besitzt, dann hat diese die Eigenschaft ...“ anzusehen. Der tatsächliche experimentelle Nachweis von Gravitationswellen auf der Erde (oder bei den aktuellsten Projekten auch im Weltall) ist aber eines der derzeit größten experimentalphysikalischen Herausforderungen[2]. Obwohl es realistisch erscheint anzunehmen, dass der Endzustand eines Gravitationskollapses ein stationäres und elektrisch geladenes schwarzes Loch sein wird, so hat der Gültigkeitsbereich des no-hair theorems doch Grenzen. Als erster gab Gary W. Gibbons 1982 eine Erweiterung der Reissner-Nordström-Lösung mittels eines geeigneten Skalarfeldes an, so dass die entstehende Raumzeit statisch und sphärisch symmetrisch ist, aber ein schwarzes Loch mit Haaren enthält, also ein solches, das nicht nur durch Gesamtmasse, Drehimpuls und elektrische Ladung zu beschreiben ist. Später konnten dann auch bei einigen anderen Materie-Modellen schwarze Löcher mit Haaren gefunden werden, was insbesondere die Sensibilität der Problemstellung in Bezug auf das betrachtete Materie- Modell verdeutlichte. Die allgemeine Situation lässt sich in etwa mit der folgenden Fragestellung bei gewöhnlichen Evolutionsproblemen vergleichen: Strebt das System für lange Zeiten gegen einen Gleichgewichtszustand, oder kommen auch komplexere asymptotische Strukturen in Betracht? Ersterer Fall entspräche der Situation, dass ein schwarzes Loch ohne Haare entsteht. Der zweite Fall ist wesentlich komplizierter; als Endzustände könnten beispielsweise Solitonen auftreten, also Strukturen, die ohne Veränderung ihrer Form durch die Raumzeit wandern. Solche Solitonen wurden erstmals 1988 von Robert Bartnik und John McKinnon für die Einstein-Yang-Mills Gleichungen gefunden.



Das Informationsverlust-Paradoxon

Nach ihrer Definition sind schwarze Löcher Bereiche, aus denen nichts mehr entweichen kann. Geht man nun weg von der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie und will man quantenmechanische Effekte mitberücksichtigen, so ändert sich die Situation fundamental, wie Stephen Hawking 1975 zeigte. Ein grundlegendes Konzept in der Quantenfeldtheorie sind Teilchen/Antiteilchen-Paare (zum Beispiel Elektron und Positron), die auch im Vakuum für kurze Zeit spontan entstehen können. Befindet sich ein solches Paar in der Nähe des Ereignishorizontes eines schwarzen Lochs, so kann es passieren, dass eines der beiden Teilchen den Ereignishorizont durchquert und verschwindet, während das zweite im Außenbereich verbleibt. Ein Beobachter weit außerhalb des schwarzen Lochs registriert dann nur das zweite Teilchen, also einen Massen- das heißt Energiefluss weg vom schwarzen Loch aufgrund der Energieerhaltung. Auf diese Weise kommt es zu einem Strahlungsphänomen, welches als Hawking-Strahlung bezeichnet wird. (Es liegt zwar nahe anzunehmen, dass im Vakuum die relevante Energie tatsächlich von dem schwarzen Loch kommt, aber einen experimentellen Beweis dafür, ebenso wie für die Hawking-Strahlung allgemein, gibt es nicht.) Die Hawking-Strahlung wird, ähnlich der thermischen Strahlung, welche ein das Licht absorbierender Körper aussendet, beschrieben durch ihre Temperatur (proportional zur inversen Masse des schwarzen Lochs) und andere makroskopische Größen (*s.* auch weiter unten). Insbesondere kann die Hawking-Strahlung also keine feinere strukturelle Information enthalten und aus dem schwarzen Loch heraus transportieren. Diese Beobachtung führt nun zum sog. Informationsverlust-Paradoxon. Obwohl der Energieverlust des schwarzen

Lochs bei einer Paartrennung sehr klein sein wird (und dabei noch umso kleiner, je größer die Masse des schwarzen Lochs ist), so könnte doch das gehäufte Auftreten dieses Mechanismus das schwarze Loch sogar ganz verdampfen lassen. Alle dem schwarzen Loch übersandte Information würde auf diese Weise komplett verloren gehen, da sie durch die Hawking-Strahlung nicht wieder zu reproduzieren wäre. Nun ist aber ein Grundpfeiler der Quantenphysik die Reversibilität (Umkehrbarkeit) der stattfindenden Prozesse, was in der beschriebenen Situation dann nicht der Fall ist. Dieses Informationsverlust-Paradoxon war der Gegenstand einer bekannten Wette der Physiker Stephen Hawking und Kip Thorne gegen John Preskill[3,4,5]. Im Jahre 1997 wetteten die ersteren, dass die Situation so ist, wie oben beschrieben: Es gibt keine, wie auch immer geartete Möglichkeit, Information aus einem verdampften schwarzen Loch wieder zu extrahieren. Dagegen wettete Preskill, dass, weil möglicherweise das Verständnis der Zusammenhänge von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenphysik noch nicht ausgereift genug sei, es letztendlich eine Möglichkeit geben würde, die Information aus dem schwarzen Loch zurückzugewinnen. Zur allgemeinen Überraschung gab Hawking die Wette 2004 auf und erklärte sich mit Preskills Standpunkt konform. Die Gründe dafür, obwohl in einer Publikation dargelegt, bleiben trotzdem etwas im Dunkeln und könnten mit Fortschritten in der so genannten String-Theorie zu tun gehabt haben. Legt man aber mathematisch rigorose Maßstäbe an, so erscheinen viele mit dem Informationsverlust-Paradoxon verbundene Fragen und Antworten spekulativ. Trotzdem stellt die Hawking-Strahlung ein wichtiges Testfeld dar für eine zukünftige TOE (theory of everything), also einer Verbindung von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenphysik.



Thermodynamik schwarzer Löcher

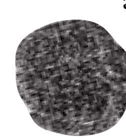
Durch Arbeiten von James M. Bardeen, Brandon Carter, Stephen Hawking und anderen in den siebziger Jahren wurde offenbar, dass es große, zunächst formale, Ähnlichkeiten zwischen dem Verhalten stationärer schwarzer Löcher und den Gesetzen der Thermodynamik gibt. Zunächst konnte man zeigen, dass die Gravitation auf der Oberfläche (das heißt auf dem Ereignishorizont) eines solchen schwarzen Lochs konstant ist. Dies entspricht dem nullten Hauptsatz der Thermodynamik, der besagt, dass die Temperatur eines sich im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems überall im System die gleiche ist. Dann stellte sich heraus, dass die Massenveränderung eines schwarzen Lochs im Verlauf seiner Entwicklung proportional zum Produkt aus Gravitation auf der Oberfläche und der Veränderung der Oberfläche selbst ist. Für thermodynamische Systeme lautete der formal analoge erste Hauptsatz, dass die Veränderung der Energie proportional zum Produkt aus Temperatur und Veränderung der Entropie ist; die Entropie ist ein Art Maß für die Unordnung im System. Ein Satz von Hawking aus dem Jahr 1971 besagt ferner, dass die Oberfläche eines schwarzen Lochs im Verlauf der Entwicklung nur zunehmen kann. Entsprechend kann die Entropie eines thermodynamischen Systems nur zunehmen, nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Schließlich kann die Gravitation auf der Oberfläche eines schwarzen Lochs nicht in endlicher Zeit den Wert Null erreichen. Analog sagt der dritte Hauptsatz der Thermodynamik, dass die Temperatur eines thermodynamischen Systems nicht in endlicher Zeit den Wert Null erreichen kann. Es entsteht also eine verblüffende Parallele dieser beiden Ergebnisgruppen, wenn man die Begriffe wie folgt austauscht: Gravitation auf der Oberfläche des schwarzen Lochs und Temperatur, Masse des schwarzen Lochs und Energie, Oberfläche des schwarzen Lochs und Entropie. Diese überraschende, aber zunächst rein formale Tatsache, kann auch mittels der Hawking-Strahlung erklärt werden, mit deren Hilfe man einem schwarzen Loch aufgrund seiner der Schwarzkörperstrahlung entsprechenden Strahlung eine Temperatur T zuordnen kann. Es ergibt sich die Formel

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} K ,$$

wobei K die Gravitation auf der Oberfläche des schwarzen Lochs bezeichnet. Hat aber das schwarze Loch eine Temperatur, so macht es auch Sinn, von der Thermodynamik schwarzer Löcher zu sprechen; insbesondere gelten die Hauptsätze der Thermodynamik in dieser Situation, die sich dann in die oben dargestellten Gesetze für schwarze Löcher verwandeln.

Kosmische Zensur

Aufgrund der bereits in der Einleitung erwähnten Singularitäten-Sätze von Roger Penrose (1965) sowie Stephen Hawking und Roger Penrose (1970) sind unter sehr allgemeinen Voraussetzungen geometrische Singularitäten in einer Raumzeit nicht zu vermeiden. Eine derartige Singularität kann beispielsweise beim Gravitationskollaps einer Massenverteilung entstehen. Die in diesem Abschnitt zu diskutierende Frage ist nun, ob eine solche Singularität immer von einem Ereignishorizont umgeben, also von außen unsichtbar sein muss. Dies ist der Gegenstand der (weak) cosmic censorship conjecture, die von Roger Penrose 1969 formuliert wurde. Die



Vermutung besagt, dass in allen beziehungsweise den allermeisten Fällen eine Art kosmischer Zensor am Werk ist, der die Singularität vor den Blicken der Außenwelt verhüllt (mit einem Ereignishorizont). Falls diese Vermutung wahr wäre, dann würde die Singularität oder Konsequenzen daraus keine Relevanz für die Außenwelt haben, da Informationen von innerhalb des Ereignishorizontes nicht entkommen können. Wäre die Vermutung dagegen falsch, dann läge eine so genannte nackte Singularität vor und externe Beobachter der Singularität könnten mit drastischen Konsequenzen konfrontiert werden. In der Singularität brechen nämlich die klassischen physikalischen Gesetze zusammen und diese Information kann sich ausbreiten. Insbesondere ist die Entstehung so genannter geschlossener zeitartiger Kurven möglich, auf denen ein Beobachter in die eigene Vergangenheit reisen könnte. Nun wird die Gültigkeit der kosmischen Zensur oft untersucht in Evolutionsproblemen, bei denen anfangs eine räumliche Geometrie gegeben ist, welche sich dann zu einer Raumzeit entwickelt; diese anfängliche räumliche Geometrie wird auch Cauchy-Hyperfläche genannt. Auf der Cauchy-Hyperfläche $\sum$ müssen auch die anfänglichen Werte weiterer Funktionen (symbolisch f genannt) festgelegt werden, die noch durch das gewählte Materie-Modell ins Spiel kommen. Es zeigte sich nun bald, dass die kosmische Zensur in strikter Allgemeinheit, also für alle solchen $\sum$ und f (selbst wenn über diese sinnvolle Annahmen gemacht werden) nicht richtig ist. Dies wurde zunächst deutlich aus Computersimulationen von Matthew Choptuik im Jahre 1993 für die Einstein-Gleichungen mit dem skalaren Feld als Materie-Modell. In diesen Simulationen wurde die Anfangsfunktion f durch eine Familie von Anfangsfunktionen λf mit einer positiven Zahl λ ersetzt. Für genügend kleines λ ist die aus $(\sum, \lambda f)$ entstehende Raumzeit flach und enthält nur Gravitationsstrahlung, aber keine Singularität (der so genannte Dispersionsfall). Ist λ dagegen hinreichend groß, so ergibt sich ein von einem Ereignishorizont umgebenes schwarzes Loch, für welches also die kosmische Zensur gilt. Es gibt nun aber einen einzigen Schwellenwert λ_0, bei dem das erste mögliche Szenario (Dispersionsfall) in das zweite (schwarzes Loch mit Ereignishorizont) wechselt, das heißt eine Art von Verzweigung auftritt. Die aus $(\sum, \lambda_0 f)$ entstehende Raumzeit enthält dann eine nackte Singularität und hat weitere besondere Eigenschaften. Die diesbezüglichen numerischen Ergebnisse von Choptuik veranlassten Hawking 1997 zur Aufgabe einer weiteren Wette von 1991 in der Konstellation Preskill und Thorne gegen Hawking. Erstere wetteten, dass kosmische Zensur nicht in voller Allgemeinheit gilt, während Hawking dies behauptete. Nun scheitert die kosmische Zensur in obigem Beispiel aber nur für genau einen Wert des Parameters. Dies legt die Vermutung nahe, dass für die allermeisten, also für generische, $(\sum, f)$ eine kosmische Zensur doch stattfinden könnte. In dieser Form wird die (weak) cosmic censorship hypothesis mittlerweise verstanden, obwohl der Begriff „generisch" in der Formulierung vage bleibt. Es ist aber allgemein schon sehr schwierig, für komplexere Materie-Modelle eine zumindest einigermaßen „große" Menge von $(\sum, f)$ anzugeben, für welche die kosmische Zensur gilt. Mathematisch rigorose Ergebnisse von Demetrios Christodoulou für das sphärisch symmetrische skalare Feld untermauerten dann die numerischen Beobachtungen von Matthew Choptuik. Es wurde zunächst bewiesen, dass nackte Singularitäten prinzipiell möglich, aber nicht generisch sind: eine derartige Raumzeit mit einer nackten Singularität kann durch eine kleine Störung der Anfangsdaten $(\sum, f)$ immer in eine Raumzeit mit einem von einem Ereignishorizont umgebenen schwarzen Loch verwandelt werden. Insbesondere folgt daraus die kosmische Zensur für das genannte Modell, im obigen generischen Sinn. Ein ähnlich vollständiges rigoroses Bild konnte erst wieder in jüngster Zeit von Ringström gezeichnet werden für so genannte Gowdy-Raumzeiten, bei denen die räumliche Topologie die eines Torus ist.

Gravitationskollaps

Hauptsächlich durch numerische Untersuchungen diverser Autoren wurden auch andere interessante Aspekte des Gravitationskollaps sichtbar, zunächst wieder beim sphärisch symmetrischen skalaren Feld als Materiemodell. Für Anfangsdaten $(\sum, \lambda f)$ mit $\lambda > \lambda_0$ nahe bei λ_0 entsteht wie oben beschrieben ein schwarzes Loch, dessen Masse mit $m(\lambda)$ bezeichnet sei. Es zeigte sich dann, dass $m(\lambda) \sim |\lambda-\lambda_0|^\gamma$ gilt mit $\gamma \sim 0.37$. Dies bedeutet zunächst, dass schwarze Löcher mit beliebig kleiner Masse möglich sind (man muss nur λ nahe genug bei λ_0 wählen). Diese Beobachtung ist aber nicht sehr intuitiv, denn für das Entstehen eines schwarzen Lochs durch einen Gravitationskollaps würde man eher erwarten, dass dies eine gewisse Mindestmasse erforderte. Verändert man ferner die Anfangsdaten zu $(\sum', f')$, so gibt es wieder einen kritischen Parameter λ'_0, der den Übergang von einem zum anderen Regime markiert. Für die entstehenden schwarzen Löcher im Falle von $\lambda_0 > \lambda'_0$ findet man trotzdem wieder das gleiche Skalierungsgesetz $m(\lambda') \sim |\lambda' - \lambda'_0|^\gamma$ mit dem gleichen Exponenten $\gamma \sim 0.37$. Dieses Skalierungsgesetz ist also universell für das sphärisch symmetrische skalare Feld und analog zu ähnlichen Skalierungsgesetzen im Bereich der dynamischen Systeme (Stichwort: Feigenbaumkonstante). Darüber hinaus zeigte sich, dass es nahe bei λ_0 so genannte selbstähnliche Lösungen mit hoher Symmetrie gibt, welche die Eigenschaft haben, dass eine Lösung zu Anfangsdaten ($\sum$, λf) für sehr lange Zeiten gut durch die selbstähnliche Lösung approximiert werden kann. Die selbstähnliche Lösung ist wieder universell, also unabhängig von den Anfangsdaten. Sie ist in eine Richtung instabil mit der Rate $1/\gamma$. Für andere Materiemodelle und Symmetrien wurden dann ähnliche Untersuchungen angestellt. Etwa für axialsymmetrische Gravitationswellen als Materie, bei gewissen Strahlung beschreibenden Flüssigkeitsmodellen oder bei so genannten perfekten Flüssigkeiten ergab sich exakt dasselbe Bild mit der gleichen Skalierungskonstante $\gamma \sim 0.37$. Im Gegensatz dazu wurde bei anderen Materie-Modellen aber auch klar, dass das Skalierungsgesetz nicht richtig sein und es demnach keine beliebig kleinen schwarzen Löcher geben kann; ein Beispiel hierfür ist das kinetische Materie-Modell. In diesem Fall spricht man von einer Massenlücke, weil schwarze Löcher erst ab einer gewissen Mindestmasse entstehen können. Auch ist hier das mögliche dynamische Verhalten komplizierter als zum Beispiel beim skalaren Feld als Materie-Modell. So erlaubt das System nun zusätzlich statische, also zeitunabhängige Lösungen f_{stat}. Verwendet man dann eine Familie ($\sum$, λf_{stat}) als Anfangsdaten, so ist für den kritischen Wert $\lambda_0 = 1$ die entstehende Raumzeit einfach statisch, das heißt sie ändert sich nicht. Für $\lambda > \lambda_0$ entstehen wieder schwarze Löcher, aber mit strikt positiver Masse. Ist dagegen $\lambda < \lambda_0$, so gibt es nicht nur die Möglichkeit des Dispersionsfalls, sondern die Lösungen können auch in der Nähe der statischen Lösung oszillieren. Welcher Fall eintritt, wird durch das Vorzeichen der so genannten Bindungsenergie bestimmt. Die nächste Frage ist dann, ob die statische Lösung f_{stat} universell ist, was analog zur Universalität der selbstähnlichen Lösung für das skalare Feld als Materiemodell wäre. Da es aber eine Vielzahl von (instabilen) statischen Lösungen für das kinetische Materie-Modell gibt, kann es hier keine Universalität geben. Die genannten Ergebnisse zeigen wiederum, dass die Art und Weise, wie der Gravitationskollaps auftritt, stark mit dem gewählten Materiemodell verknüpft ist.

Existenz und Stabilität von Lösungen

Bevor überhaupt von qualitativen Eigenschaften einer Raumzeit (wie zum Beispiel der Existenz eines schwarzen Lochs) gesprochen werden kann, muss zunächst die Existenz dieser Raumzeit erst sichergestellt sein. Dies versucht man oft dadurch zu erreichen, dass die Einstein-Gleichungen und die Gleichungen für die Materie als System von so genanten partiellen Differentialgleichungen umgeschrieben werden, für welche Anfangsdaten in Form einer Cauchy-Hyperfläche $\sum$ für die Geometrie und in Form von Funktionen f für die Materie als gegeben betrachtet werden, aus denen sich dann die gesamte Raumzeit wie bei einem Evolutionsproblem entwickeln lässt. Dabei ist zu beachten, dass $\sum$ und f nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können, sondern gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllen müssen, deren Lösbarkeit zuerst untersucht werden muss. Hauptsächlich interessiert ist man dann an eindeutigen und maximalen, also nicht fortsetzbaren Raumzeiten. Dazu versucht man zunächst, ein kleines Stück der Lösungs-Raumzeit zu konstruieren, was sowohl für die Vakuum-Feldgleichungen als auch für viele Materie-Modelle möglich ist, wenn die Anfangsdaten ($\sum$, f) als genügend regulär vorausgesetzt werden. Dies folgt mehr oder weniger aus einem allgemeinen Ergebnis von Yvonne Choquet-Bruhat aus dem Jahre 1952. Das eigentliche Problem ist dann zu beweisen, dass es maximale Fortsetzungen der Raumzeit gibt, welche geodätisch vollständig sind. Dies bedeutet in etwa, dass es kein Koordinatensystem für die Raumzeit gibt, in welchem diese nach vorne in der Zeit singulär wird; diese Formulierung ist jedoch etwas problematisch, weil es im Allgemeinen keine ausgezeichnete Zeitkoordinate gibt. Da aber das Unterfangen, ein derartiges Ergebnis für die Einstein-Gleichungen mit einem allgemeinen Materie-Modell erzielen zu wollen ziemlich hoffnungslos ist, beschränkt man sich oft auf spezielle Materie-Modelle unter Hinzunahme zusätzlicher Voraussetzungen. Die Betrachtung kleiner Anfangsdaten beziehungsweise kleiner Störungen ist eine solche Möglichkeit, das heißt man untersucht Lösungen, die aus Anfangsdaten nahe an denen einer bekannten Lösung entstehen. So haben etwa die Vakuum-Feldgleichungen als spezielle Lösung die übliche flache vierdimensionale Raumzeit (den so genannten Minkowski-Raum), die global in der Zeit existiert. Demetrios Christodoulou und Sergiu Klainerman konnten nun 1993 beweisen, dass Anfangsdaten, die nahe genug an der räumlichen Geometrie des Minkowski-Raums sind, zu maximalen und geodätisch vollständigen Raumzeiten führen. Für dasselbe Ergebnis konnte später von Hans Lindblad und Igor Rodnianski durch die Wahl anderer Koordinaten (den so genannten harmonischen Koordinaten) ein wesentlich kürzerer Beweis gegeben werden. Das Stabilitätsergebnis für den Minkowski-Raum ließ sich dann auch auf Materie-Modelle mit elektrischer Ladung (das Einstein-Maxwell System) übertragen. Ein ähnliches Resultat für kleine Anfangsdaten gibt es auch für das kinetische Materie-Modell unter der zusätzlichen Einschränkung, dass nur sphärisch symmetrische Lösungen betrachtet werden. Auch bei der Frage der Existenz und Stabilität von Lösungen spielt es eine wichtige Rolle, welches Materie-Modell verwendet wird. Einen Anhaltspunkt dafür, ob man für ein gewähltes Materie-Modell globale Lösungen erwarten kann, gibt der Newton'sche Limes des Systems.

Formal erhält man nämlich die klassische Newton'sche Gravitationstheorie als Grenzwert der Einstein'schen Theorie, wenn man die Lichtgeschwindigkeit gegen unendlich streben lässt. Verwendet man die richtige Skalierung, so bedeutet dies, dass sich alle Körper im System langsam (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) bewegen, was gerade der Gültigkeitsbereich der Newton'schen Theorie ist. Führt man diese Prozedur beispielsweise bei hydrodynamischen Modellen wie dem Einstein-Euler System durch, so ergeben sich als Newton'scher Limes klassische Flüssigkeitsmodelle, in denen so genannte Schocks auftreten können und welche deshalb oft nur Lösungen in einem stark verallgemeinerten Sinn haben. Dies legt die Vermutung nahe, dass man auch beim entsprechenden relativistischen Modell auf Schwierigkeiten stoßen wird. Für das kinetische Materie-Modell (das Einstein-Vlasov System) ist die Situation mehr Erfolg versprechend, denn für seinen Newton'schen Limes, das so genannte Vlasov-Poisson System, ist seit den achtziger Jahren die globale Lösbarkeit bekannt.[6]

Summary

This short overview paper concerns the properties of black holes and the general theory of relativity, mainly taking a mathematical viewpoint. Among other topics we briefly discuss uniqueness theorems for black holes, quantum effects, black hole thermodynamics, cosmic censorship, gravitational collapse, and the existence and stability of solutions in general.

Anmerkungen

1) Wheeler 1998.
2) Wolschin 2000.
3) Hawking 2001.
4) http://www.theory.caltech.edu/~preskill
5) Thorne 1994.
6) Danksagung: Viele Diskussionen mit Håkan Andréasson und Gerhard Rein haben zu diesem Artikel beigetragen.

Literatur

– J.A. Wheeler: Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics, Norton & Co. 1998.
– S.W. Hawking: The Universe in a Nutshell, Transworld Publ. 2001.
– http://www.theory.caltech.edu/~preskill
– K.S. Thorne: Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy, Norton & Co. 1994.
– G. Wolschin: Jagd auf Gravitationswellen, Spektrum der Wissenschaft 12/2000.
– N. Straumann: General Relativity with Applications to Astrophysics, Springer Verlag 2004.
– A.D. Rendall: Partial Differential Equations in General Relativity, Oxford University Press 2008.
– Übersichtsartikel zu diversen Themen unter http://www.livingreviews.org

Der Autor

Markus Kunze studierte Mathematik an der LMU München. Der Promotion 1994 bei Jürgen Batt in München folgte eine Tätigkeit in München als Postdoc. Nach einem Wechsel nach Köln habilitierte er sich dort 1999 und wurde 2001 Professor für angewandte Analysis in Essen.