BACHELORSEMINAR LEHRAMT MATHEMATIK GYGE/BK: POLYNOME–GEOMETRIE–ALGORITHMEN

Ort: Raum WSC-S-U-3.01.
Zeit: Montag 16-18 Uhr.

Inhalt

Eine besondere Stärke der mathematischen Sprache ist, dass sie erlaubt, sehr unterschiedlich aussehende Fragen auf eng verwandte Probleme zurückzuführen - häufig steht am Ende ein Gleichungssystem, dessen Lösungen wir finden möchten.
In der Schule haben Sie einige Verfahren zur Lösung von einfachen Gleichungen kennen gelernt und in der Linearen Algebra ein allgemeines Verfahren, um lineare Gleichungssystem zu lösen.
Der Ausgangspunkt für dieses Seminar ist die einfache Frage, wie wir die Lösungsmengen allgemeiner Gleichungssysteme verstehen können. Die Technik der sogenannten Gröbnerbasen wurde unabhängig an verschiedenen Orten von Heisuke Hironaka und Bruno Buchberger erfunden und zunächst für abstrakte Fragen verwendet (Hironaka verwendet diese in seiner berühmten Arbeit zur Auflösung von Singularitäten). Mit der Entwicklung von Computeralgebra Systemen bekam diese Erfindung ein unerwartetes neues Anwendungsgebiet und ist hierfür bis heute sehr wichtig. Die Grundidee ist einfach: Wie könnte eine Art Gauss-Algorithmus für nicht notwendig lineare Gleichungssysteme aussehen? In diesem Seminar wollen wir diese Methode und einige Anwendungen kennenlernen.
Meine Wünsche für das Seminar sind:

(1) Jeder Themenblock beginnt mit einer Frage, die sich allgemein verständlich formulieren läßt. (Eine interessierte Schülergruppe könnte diese als Ausgangspunkt für eine AG nehmen.)
(2) Mathematische Texte beginnen oft mit der Lösung eines Problems, oder sogar mit mathematischer Begriffsbildung, die entstanden ist, um einen Sachverhalt zu beschreiben. Ich möchte Sie in diesem Seminar gerne ermuntern, das einmal umzudrehen und die Begriffsbildung zu erklären - Wieso ist ein Begriff nützlich? Wo kommt der Wunsch her eine Definition in genau dieser Weise zu formulieren?
(3) Die Zuhörer können aus jeder Sitzung wenigstens eine Einsicht, einen Trick oder eine Technik mitnehmen. Idealerweise wird dies in der Sitzung für eine Aufgabe/Aktivität für das Publikum genutzt, denn Dinge die die Teilnehmer selbst ausprobieren, bleiben besser in Erinnerung.
(4) Jeder Teilnehmer erklärt das Argument für ein fortgeschrittenes Resultat.

Eine Bitte an alle Vortragenden

Alle Vortragenden möchte ich dringend bitten, rechtzeitig unsere Betreuungsangebote für das Seminar wahrzunehmen:

- Für Fragen zum mathematischen Inhalt sollten Sie uns zwei Wochen vor dem Vortrag kontaktieren, wenn diese ausgeräumt sind können wir gerne
- eine Woche vor dem Vortrag über Ihr Konzept zum Vortrag sprechen.

Ich weiß, dass dieser Vorlauf Überwindung kostet, aber in der Vorbesprechung können wir Rückfragen viel leichter klären als während des Vortrags.

Literatur

[1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals varieties and Algorithms*, 4te Auflage, Springer Verlag 2015

[2] M. Aigner, G. Ziegler: *Das Buch der Beweise*, 5te Auflage, Springer 2018

[3] J. Silverman, J. Tate: *Rational Points on Elliptic Curves*, 2te Auflage, Springer Verlag 2015

[4] S. Lang: *Mathe! Begegnungen eines Wissenschaftlers mit Schülern* Vieweg Verlag 1991.

[5] L. Hefendehl-Hebeker: *Wege zur Formelsprache* in Unikate 33, Universität Duisburg Essen. (Heft auf Anfrage verfügbar solange Vorrat reicht)

Anmerkung: Zu jedem Kapitel gibt es in [1] eine Reihe von Übungsaufgaben. Wie in Vorlesungen, müssen Sie diese anschauen um zu sehen, ob Sie den Text verstanden haben – hier finden Sie auch Anregungen für den Einstieg in das Thema und Aktivitäten im Seminar.

Hinweise zur Vorbereitung der Seminarvorträge

Lassen Sie mich einige Fragen formulieren, die Ihnen bei der Vorbereitung jedes Seminarvortrages helfen können - und natürlich helfen wir Ihnen gerne wenn Sie in der Vorbereitung selbst Fragen haben. Jeder Vortrag sollte diese Fragen beantworten.

(1) *Wie passt der Vortrag in das Seminarprogramm?* Was sind Anknüpfungspunkte an die vorangegangenen Vorträge und das Vorwissen Ihrer Zuhörer? Welche Punkte sind für die folgenden Vortragenden wichtig?

(2) *Was sind die wesentlichen Punkte, die jeder Zuhörer aus dem Vortrag mitnehmen soll?* Formulieren Sie diese 1-2 Punkte so griffig wie möglich. Wenn Sie eine griffige Formulierung mehrfach aussprechen (z.B. in einem Fazit wiederholen) ist die Chance, dass ihre Botschaft ankommt größer. Es hilft, wenn Sie selbst einen Grund finden, wieso Ihnen diese Punkte des Vortrags selbst gefallen.

(3) *Wie lassen sich die mathematische Inhalte übersichtlich und exakt formulieren?* Schwierig, sind oft: Begriffe, Aussagen und Rechnungen.

   (a) *Begriffe:* Definitionen fallen niemals (!) vom Himmel und sie müssen Ihrem Publikum helfen, diese zu verstehen und zu verdauen. Wieso führen Sie einen Begriff ein? Wieso genau so und nicht anders? Was sind die wesentlichen Beispiele für den Begriff an die ich denken soll? (Keine Definition ohne Beispiel, wenigstens ein Beispiel sollte ich vorher schon gekannt haben.) Wo ist mir das Konzept schon begegnet?
   Der amerikanische Mathematiker Spencer Bloch hat das einmal so formuliert: Wenn Sie neuen mathematischen Konzepten begegnen stellen Sie die gleichen Fragen, wie wenn Sie neue Leute kennenlernen: *„Where do you come from? What's your job?"*

   (b) *Aussagen:* Manche Aussagen werden in der Quelle im Text formuliert, oder in mehrere Aussagen zerlegt. Für einen Vortrag ist es hilfreich, Aussagen exakt in Form eines Satzes oder einer Behauptung anzugeben – möglichst so, dass hierdurch wesentliche Punkte klar zusammengefasst werden. Sie haben vielleicht noch nie selbst eine mathematische

Aussage als Satz formuliert. Denken Sie gut darüber nach, wie Sie die Aussagen gleichzeitig korrekt und übersichtlich formulieren. Das Anschreiben langer Formulierungen kostet viel Zeit und Sie verlieren dabei den Kontakt zu Ihrem Publikum. Formeln sind oft sehr viel kompakter, aber diese benötigen dann eine transparente mündliche Erläuterung.

(c) *Rechnungen:* Auch hier ist Überblick wichtig! Was sind die wichtigen Schritte? An der Tafel lassen sich Argumente und Umformungen oftmals klarer formulieren als auf Papier. Nutzen Sie das Medium! Wenn Sie die Rechnung von einem vorbereiteten Blatt abschreiben müssen, ist dies oftmals ein Zeichen dafür, dass Sie noch nicht verstanden haben was der wesentliche Punkt ist, den Sie Ihren Zuhörern vermitteln möchten. Wenn eine Rechnung lang ist: Können Sie diese strukturieren? Können Sie die Rechnung am Ende in Worten zusammenfassen?

(4) *Was ist ein guter Einstieg in das Thema?* Dies steht hier am Ende der Liste, denn diese Frage können Sie erst beantworten, wenn Sie sich selbst über den Inhalt klar geworden sind. In den ersten Minuten des Vortrags gilt es den Zuhörern das Thema schmackhaft zu machen. Der Einstieg sollte daher sehr gut geplant sein.

Keine Sorge, bei der Vorbereitung kann ich Ihnen helfen und Sie können die Fragen natürlich mit mir diskutieren. Weitere Hinweise hat Manfred Lehn in seinem Aufsatz „Wie halte ich einen Seminarvortrag?“ formuliert.

Seminarprogramm

1. Vortrag: Polynome und Geometrie. In diesem Vortrag geht es um zwei Fragen, die Sie vielleicht kennen:

- In der Schule haben Sie den Satz des Pythagoras kennengelernt und vielleicht haben Sie dabei auch erzählt bekommen, dass ein Dreieck mit den Kantenlängen $(3, 4, 5)$ einen rechten Winkel hat und dies für den Bau der Pyramiden benutzt wurde. Kennen Sie weitere Beispiele? Auf einer Babylonischen Tontafel (mehr als 3000 Jahre alt) findet sich das Beispiel $(13500, 12709, 18541)$. *Wie kann es sein, dass jemand dieses Beispiel ohne technische Hilfsmittel findet?*
- Eine ganz anderes Problem ist Ihnen vielleicht in der Analysis begegnet: Die Punkte auf dem Einheitskreis haben die Koordinaten $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ - aber: *Gibt es eine Möglichkeit diese Punkte ohne Winkelfunktionen zu beschreiben?*

In diesem Vortrag soll geklärt werden, wieso die beiden Fragen eine gemeinsame Antwort haben - wie eine Mischung aus Geometrie und Algebra das erklärt und wieso Formel für Winkelfunktionen sich manchmal einfach Identitäten zwischen rationalen Funktionen erklären lassen.
Referenz: Der mathematische Inhalt des Vortrags findet sich in [3, Abschnitt 1.1, Seite 1-8]. Eine Schulstunde zur ersten Frage findet sich in [4]. In [1, § 3 Aufgabe 6] finden Sie eine Erklärung, wie die gleiche Methode für Kugeloberfläche funktioniert, den geometrischen Teil des Arguments finden Sie ebenfalls in [1, § 3]

2. Vortrag: Parametrisierung von Kurven. Parametrisierung von Kurven und Flächen ist auch ein sehr praktisches Problem, zum Beispiel haben Bézier und de Casteljau (beide im Autodesign für unterschiedliche Firmen tätig) eine möglichst runde Familie von Raumkurven gesucht, die sich ohne Kanten zusammenfügen lassen. Diese Kurven haben sich in vielen Grafikanwendungen sehr weit verbreitet: fast jeder Drucker und die meisten skalierbaren Schriftarten verwenden diese Kurven.
Die Kurven werden am Ende des Abschnitts [1, § 3] erklärt. Im Vortrag sollten Sie die Darstellung hier umdrehen: Die Frage woher die Gleichung kommt ist viel interessanter, wenn Sie das geometrische Problem am Ende des Abschnittes nehmen können Sie selbst entwickeln wie sich die Gleichung finden lässt - fragen Sie nach, wie das funktioniert, aber hier können wir lernen, wie sich eine Gleichung lesen lässt.
In diesen Formeln sehen Sie wie schon im ersten Vortrag Polynome in mehreren Variablen/Buchstaben die teilweise als Parameter teilweise als unbekannte Konstanten verwendet werden. Für die Umformungen und Berechnungen, die Sie mit den Formeln durchführen spielen die Buchstaben zumeist alle die gleiche Rolle.
Der Übergang zum Rechnen mit Buchstaben ist in der Schule ein Schritt, der häufig Schwierigkeiten macht - es gibt dazu viel Literatur, ein kurzer allgemeinverständlicher Einstieg ist [5].
Für uns ist im Seminar nun der Schritt das Rechnen mit Buchstaben ernst zu nehmen wichtig und der zweite Teil des Vortrags soll dies formalisieren ([1, Abschnitt 1]):
Was ist ein Polynom und ein Polynomring? Der wesentliche Punkt dieser Begriffe – die Sie vielleicht schon lange kennen – ist, dem Rechnen mit Buchstaben einen exakten Rahmen zu geben. Erinnern Sie kurz daran wieso das eine gute Idee ist (z.B. Die Ergebnisse gelten dann in jedem Zusammenhang in dem Verknüpfungen $\cdot$ und $+$ erklärt sind. Wir rechnen oft zunächst mit Zahlen, aber ein Vorteil der formalen Manipulation ist, dass wir später auch andere Objekte einsetzen können z.B. Funktionen, verschiedene Typen von Zahlen, Matrizen etc., ein anderer dass

Umformungen mit Zahlen häufig unübersichtliche werden - wenn wir kompliziert aussehende Terme durch einen Buchstaben ersetzen lässt sich die Strategie einer Rechnung oft leichter überblicken.).
Erklären Sie den Unterschied zwischen Polynomen und Polynomfunktionen (Kapitel 1 Korollar 6 und Aufgabe 2 - im Vortrag sollte klar werden, dass Korollar 6 und Satz 5, zwei Formulierungen der gleichen Aussage sind - der Abschnitt des Buches enthält zu viele Definitionen). Das Resultat ist hier einfach: Für unendliche Körper (z.B. die rationalen oder reellen Zahlen) sind zwei Polynomfunktionen genau dann gleich, wenn die polynomiellen Formeln im Polynomring gleich waren, D.h. die Formeln lassen sich durch elementare Umformungen ineinander überführen. In endlichen Körpern ist das nicht richtig. (Wieso?)
Nach dieser abstrakten Definition müssen wir die Symbole wieder mit geometrischer Vorstellung zusammenbringen. Das geschieht in [1, Kapitel 1 Abschnitt 2]. Die Beispiele sind hier besonders wichtig! Schauen Sie alle Beispiele an! (Aufgabe 7 ist vielleicht besonders schön?)
Referenz: [1, Kapitel 1, Ende Abschnitt 3,], [1, Kapitel 1 §1 und §2.] (in dieser Reihenfolge) - als Exkurs [5].

3. Vortrag: Gleichungssysteme umformen – Ideale. Im vorigen Vortrag haben wir Lösungsmengen von Gleichungssystemen geometrisch interpretiert - das klärt nicht die Frage wie wir Lösungen tatsächlich finden, beschreiben und ob ein System überhaupt Lösungen besitzt.
Wie für lineare Gleichungen würden wir in Beispielen versuchen, allgemeinere Gleichungen umzuformen, aber leider sind hier auch Umformungen hilfreich, die keine Äquivalenzumformungen sind (z.B. eine Gleichung mit x multiplizieren). Daher geht es vielleicht anlässlich eines konkreten Beispiels zunächst darum wie die Frage: „Welche verschiedenen Gleichungssystem haben die gleichen Lösungmengen?“ auf den Begriff des Ideals führt: Gleichungssysteme haben die selbe Lösungsmenge, wenn die erzeugten Ideale übereinstimmen - Gilt die Umkehrung? - das ist [1, Kapitel 1, §4 Proposition 4] die einfach, aber wichtig für uns ist.
Im Rest dieses Abschnittes des Buches werden einfache Eigenschaften von Lösungsmengen in Aussagen über Ideal umformuliert - Gleichungen weglassen vergrößert die Lösungsmenge, Gleichungen zusammenfügen entspricht dem Schnitt von Lösungsmengen etc. - das sollten Sie kurz vorstellen, aber dabei klar machen, dass das nur ausprobiert wir elementare Beobachtungen in der Sprache der Ideale aussehen, um den Begriff besser zu verstehen.
Im zweiten Teil des Vortrags wollen wir kurz zu Polynomen in einer Variablen zurückkehren. Zunächst haben diese in den komplexen Zahlen immer Lösungen. Merkwürdigerweise wird dieses Resultat häufig nicht erklärt, wir wollen hier einen sehr kurzen Beweis kennenlernen ([2, Kapitel 21]). Auch hier wäre es schön, wenn Sie erklären könnten, wie jemand auf dieses Argument kommen könnte - es wäre auch schön, wenn Sie das Argument einmal an Beispielen die keine reellen Lösungen haben visualisieren könnten (Mit Geogebra können sie den Betrag eines komplexen Polynoms visualisieren).
Referenz: [1, Kapitel 1 §4]und [2, Kapitel 21].

4. Vortrag: Polynomdivision oder Wie können wir Gleichungssysteme vereinfachen? Erinnern Sie an den Begriff des Ideals, dem zentralen Begriff zum Umformen von Gleichungssystemen aus dem letzten Vortrag und erklären Sie, wie (Polynom-)Division mit Rest die Ideale im Polynomring einer Variablen bestimmt. Das kennen Sie vielleicht schon und das erklärt wieso Polynome vom Grad n höchsten n Nullstellen besitzen. [1, Kapitel 1 §5].

In Termen von Idealen bedeuten diese Resultate, dass im Polynomring in einer Variablen jedes Ideal in der Form $I = (f)$ für ein einziges Polynom f geschrieben werden kann. (Wenn Sie das in der linearen Algebra kennengelernt haben sollten Sie das kurz halten und an das Minimalpolynom einer linearen Abbildung erinnern, GCD kennen Sie als ggT.)
Zurück zum Ausgangsproblem: Wie können wir den Gauß-Algorithmus so mit Divisionsverfahren kombinieren, dass wir Variablen entfernen können? (Kapitel 2 §1 können Sie kurz halten.)
Als Einstieg in das allgemeinere Problem sind vielleicht die Beispiele in §3 geeignet - der Versuch Teilen-mit-Rest für Polynome in mehreren Variablen durchzuführen. Das führt auf den einfachen Begriff der Ordnung auf Monomen, dafür brauchen wir Beispiele. (§2).
Referenz: Kapitel 1 §5 Kapitel 2 §1, Die Beispiele aus §3 und dann §2. (vorzugsweise in dieser Reihenfolge.)

5. Vortrag: Der allgemeine Divisionsalgorithmus und Dickson's Lemma. Erinnern Sie kurz an das Teilen mit Rest und Monomordnungen aus dem vorigen Vortrag und erklären Sie dann den allgemeinen Divisionsalgorithmus ([1, Kapitel 2 §3 Theorem 3]). Und illustrieren Sie an einem Beispiel, wieso es hier passieren kann, dass ein überflüssiger Rest übrig bleibt.
Unser nächstes Ziel ist es, diesen Effekt zu reparieren. Dazu machen wir im zweiten Teil des Vortrags einen Exkurs zu Hilberts Basissatz.
Motivieren Sie zunächst die allgemeine Frage: Können wir Gleichungssysteme mit unendlich vielen Gleichungen immer auf endliche Systeme zurückführen? (Sie sollten ein Beipiel suchen, das zunächst auf ein potenziell unendliches System von Gleichungen führt.)
In Kapitel 2 §4 betrachten wir nun zunächst besonders langweilige Gleichungssysteme: Monomiale Ideale. (Erklären Sie, wieso diese geometrisch langweilig sind!) Keine Sorge, das ist der langweilige Spezialfall, der die Eintrittskarte für das Hauptergebnis darstellt. Für diese Ideale sollte es leicht sein gute Erzeugende zu finden, denn Potenzgesetze übersetzen das in Rechnen mit Exponenten. Das Hauptresultat ist hier das Dicksonsche Lemma (§4 Theorem 5), bei dem es schön wäre, wenn Sie erklären könnten, wieso der formale Beweis erklärt, wieso das intuitiv klar ist.
Folgern Sie daraus, dass es auch in beliebigen Idealen im Polynomring endlich viele einfache Erzeugende gibt (Hilbertscher Basissatz §5 Theorem 5)
Referenz: Kapitel 2 §4 und §5 (Bis Corollary 6).

6. Vortrag: Gröbnerbasen - wie wir prüfen können, ob wir eine gefunden haben und wie wir diese finden. In diesem Vortrag soll das Kriterium von Buchberger motiviert und erklärt werden (Kapitel 2 §6 Theorem 6). Ich erkläre Ihnen gerne, wie ich mir vorstelle, dass jemand auf diese Idee kommt.
Im zweiten Teil geht es dann darum, einen Algorithmus zu erklären, der es erlaubt Gröbnerbasen zu finden (Kapitel 2 §7 Theorem 2). Vorsicht: Dieser Satz sieht womöglich anders aus, als Sätze die Sie bisher gesehen haben. Wiederum benötigen wir Beispiele und Anwendungen. Es ist wichtig, dass jeder Teilnehmer ein Beispiel selbst rechnet - nur so kann ich mir das Verfahren merken. Ein solches Beispiel müssen Sie sorgfältig aussuchen, denn in ungeschickt gewählten Beispielen werden die Koeffizienten unhandlich.
Referenz: Kapitel 2 §6 und §7.

7. Vortrag: Anwendung: Eliminationstheorie - oder wie werden wir Unbekannte los? Erinnern Sie zunächst an die Gröbnerbasen aus dem vorangegangenen Vortrag und erklären Sie, wie diese Methode erlaubt die Fragen

- Ist eine Gleichung in einem Gleichungssystem überflüssig?

- Wie kann ich aus einer Parameterform einer geometrischen Figur eine Gleichung bekommen?

Für lineare Gleichungen und Geraden kennen Sie die Antworten schon. Allgemeiner finden wir das jetzt [1, Kapitel 2 §8]
Im zweiten Teil können wir nun den versprochenen Gauss-Algorithmus soweit möglich für Polynome finden - das ist die Eliminsationstheorie, die in Kapitel 3 §1 und §2 zunächst ganz algebraisch (§1) erklärt wird und dann (§2) geometrisch interpretiert wird. Der Übergang zwischen den beiden Betrachtungsweisen ist hier wesentlich. Wie immer, sollten Sie die Resultate durch Beispiele motivieren und illustrieren.
Referenz: [1, Kapitel 2 §8] [1, Kapitel 3 §1 und §2]

8. Vortrag: Wie finden wir Gleichungen für parametrisierte Teilmengen? Aus der Schulmathematik und der linearen Algebra wissen Sie, wie wir zwischen Parameterdarstellungen und linearen Gleichungssystemen hin und her wechseln können. Mit unseren Methoden lässt sich der Übergang von Parametrisierungen zu Gleichungssystemen auch für nichtlineare Abbildungen durchführen. Hierbei tritt ein neuer Effekte auf: Parametrisierungen haben oft Lücken.
Als Einstieg können Sie zunächst die Frage wie in [1, Kapitel 3 §3] motivieren - vielleicht erinnern Sie zusätzlich an die Fragestellung für Geraden, die Sie aus der Schule kennen. Die Grundidee ist dann einfach: Eine Parametrisierung liefert ein Gleichungssystem für den Graphen der Funktion und dafür können wir Eliminationstheorie verwenden.
Im zweiten Teil können Sie dann auf die Parametrisierung des Kreises aus dem ersten Vortrag erinnern, für den rationale Funktionen auftauchten. Auch mit diesen Ausdrücke können wir - wie mit Polynomen - symbolisch rechnen, das führt auf den Begriff des Körpers der rationalen Funktionen [1, Kapitel 1 §3]. Hier sollten Sie klarstellen, dass das Wort „Funktion“hier etwas irreführend ist, da kein Definitions- oder Wertebereich angegeben wird, sondern nur ein formaler Ausdruck. Das ist hier überaus praktisch, denn es erklärt wieso die Rechnungen mit Buchstaben bei denen Sie in der Schule of Fallunterscheidungen (für $x \neq 0$) machen mussten manchmal Ergebnisse liefern, die im Nachhinein auch wieder für $x = 0$ gelten (ein Beispiel wäre die Berechnung der inversen Matrix zu $\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$) Diese Erklärung kommt in der Quelle sehr kurz, Sie sollten sich hierfür etwas Zeit nehmen.
Damit können wir die Methode zum finden von Gleichungssystemen auch für rationale Parametrisierungen anwenden [1, Kapitel 3 §3].
Referenz Kapitel 3 §3.

9. Vortrag: Resultanten und der Erweiterungssatz. Um die Anwendungen zu vervollständigen fehlt noch ein Beweis des Erweiterungssatzes: Wann können wir Teil-Lösungen von Gleichungssystemen lassen sich zu Lösungen vervollständigen? Dieser soll in hier mit Hilfe von Resultanten erklärt werden - die leider mittlerweile in Vergessenheit geraten: Es gibt eine einfache Determinante, die entscheidet, ob zwei Polynome teilerfremd sind. Hier sehen Sie, dass lineare Algebra manchmal auch die Antwort auf eine nicht-lineare Frage liefern kann - zudem kommt hier eine Version der Cramerschen Regel vor, die in der linearen Algebra manchmal etwas komplizierter aussieht.
Referenz: Kapitel 3 §6.

10. Vortrag: Anwendungen: Roboterarme, Elementargeometrie und Algebra. In diesem Vortrag geht es darum einige Anwendungen der Methoden zu erklären. Je nach Ihrem Interesse, können Sie hier eine Variante auswählen oder beide kürzer behandeln:

In [1, Kapitel 6 §1-3.] wird ein elementares Modellierungsproblem für die Steuerung von Roboterarmen erklärt, für das die Methoden des Seminars sehr nützlich sind.
In [1, Kapitel 6 §4] wird erklärt, wieso sich die Aussagen der Elementargeometrie im Prinizip als algebraische Aussagen umformulieren lassen und damit auch mit den Algorithmen der vorigen Vorträge beweisen lassen.
Referenz: Kapitel 6.

11.Vortrag: Exkurs: Buchstaben mit Rechenregeln - ein anderer Blick auf die komplexen Zahlen. Sie kennen die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbf{R}\}$ mit der Rechenregel $i^2 = -1$ oder $i^2 + 1 = 0$. Hier wurde ähnlich wie beim Polynomring zu $\mathbf{R}$ der formale Buchstabe i hinzugenommen und die Rechenregel $i^2 + 1 = 0$ hinzugefügt.
Wie können wir die Rechenregel in Termen von Polynomen beschreiben?
Vielleicht kennen Sie auch die endlichen Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die durch das Rechnen bis auf Vielfache einer Primzahl p entstehen, d.h., hier nehmen wir die ganzen Zahlen und ignorieren alle Vielfachen von p - ignorieren entspricht für mich $= 0$ setzen.
Das können wir auch mit Polynomen machen: [1, Kapitel 5 §2 Definition 1 bis Theorem 6].
(weitere Literaturangaben folgen)

12. Vortrag: Projektive Geometrie und homogene Ideale. Die letzten beiden Vorträge geben einen Ausblick in die projektive Geometrie: Die Frage, ob sich parallele Geraden im Unendlichen schneiden oder nicht hat womöglich zur Entdeckung des projektiven Raumes beigetragen. Ähnlich wie die komplexen Zahlen hilft diese Geometrie viele Pathologien von Schnittmengen zu erklären. In diesem Vortrag geht es zunächst darum, den projektiven Raum einzuführen und zu erklären, wie Teilmengen hiervon durch homogene Polynome beschrieben werden und auf diese Weise Teilmengen des k^n vervollständigen.
Referenz: Kapitel 8 §1-§4.

13. Vortrag: Der Satz von Bézout. Zum Abschluss nun der Satz von Bézout: Der Schnitt zweier Kurven vom Grad d_1 und d_2 hat im komplexen projektiven Raum genau $d_1 \cdot d_2$ Schnittpunkte, wenn diese mit der richtigen Schnittvielfachheit gezählt werden.
Referenz: Kapitel 8 §7