

Zusammenfassender Bericht

Die Entwicklung des Drallsatzes^{*)}

Von C. TRUESDELL

Obwohl die Mechanik gemeinhin als ein Teil der Physik angesehen wird, ist es nicht den Bemühungen der Fach-Physiker zu verdanken, daß die vergangenen zwei Jahrzehnte eine neue Blüte der klassischen Mechanik gesehen haben, nicht nur in den Anwendungen, sondern auch besonders in den Grundlagen; eine Blüte, die sich in einem Halbdutzend eigens für dieses Gebiet gegründeter Zeitschriften und in einer kleinen Flut von Büchern entfaltet hat. Dem typischen Fach-Physiker erscheint die klassische Mechanik als ein vollendetes Kapitel der *Philosophia Naturalis*; jedoch von dem, was er darüber in der kurzen Einführung, die er während des Studiums der theoretischen Physik erhält, gelernt hat, wird fast nichts vom modernen Theoretiker der reinen Mechanik als allgemeingültig, geschweige denn gut durchgeführt, angesehen.

Der Drallsatz bringt ein Auseinanderzweigen in Methode und Standpunkt ans Licht, das sich mit jedem anderen Fachrichtungs-Gegensatz messen kann. Erinnern wir uns wie der Satz in einem typischen Lehrbuch der Physik dargestellt wird. Der Bestimmtheit halber wählen wir die „Theoretische Physik“ von Joos¹⁾, aber fast jedes andere Lehrbuch würde den gleichen Zweck erfüllen, wenn auch die neueren oft weniger gewissenhaft und explizit vorgehen. Die Bewegungsgleichung für das n -te Teilchen eines Systems von Massenpunkten lautet

$$(1) \quad m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_i \mathbf{F}_{ik}.$$

Das sogenannte „NEWTONsche Axiom der Gleichheit von actio et reactio“ wird dann in der Form $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ niedergelegt. Es sei \mathbf{M} das Moment des Impulses, d. h. der Drall:

$$(2) \quad \mathbf{M} \equiv \sum_k m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k.$$

Berechnet man dann $\dot{\mathbf{M}}$, so ergibt sich

$$(3) \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \sum_{k,j} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{jk},$$

wo \mathbf{L} das resultierende Drehmoment der äußeren Kräfte ist:

$$(4) \quad \mathbf{L} \equiv \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k.$$

Wenn die Wechselwirkungskräfte \mathbf{F}_{ik} Zentralkräfte sind, d. h. wenn $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{jk} = 0$, dann geht (3) in

$$(5) \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$$

über, d. h. in den gewünschten Drallsatz. Joos spricht das Ergebnis folgenderweise aus: „In einem System von Massenpunkten, in welchem die inneren Kräfte zwischen zwei Punkten die Richtung der Verbindungsstrecke haben, ist die zeitliche Änderung des Gesamtdralls gleich der Resultante der Momente der äußeren Kräfte.“

Gegen diesen Satz oder seinen Beweis kann niemand Bedenken erheben. Über den Anwendungsbereich des Satzes ist sich Joos aber nicht ganz sicher, denn er fügt im Kleindruck hinzu: „Die für die Gültigkeit des Satzes gemachte Einschränkung ist von geringer Bedeutung: Man kann sich aus Symmetriegründen keine zwischen zwei Punkten wirkende Kraft denken, die nicht in die Richtung der Verbindungsachse fällt, da außer dieser keine ausgezeichnete Richtung be-

^{*)} Text eines Vortrages, den der Verfasser in den Monaten Juni-Juli 1963 in Freiburg i. Br., Berlin und Aachen gehalten hat. Eine englische Fassung mit vollständiger Quellenangabe wird in *Mélanges Alexandre Koyré*, Paris, erscheinen.

¹⁾ G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, 5. Aufl., Leipzig 1943.

steht. Wenn man etwa als Gegenbeispiel das BIOT-SAVARTSche Elementargesetz anführen wollte, so ist zu bedenken, daß es sich hier um die Kraft zwischen einem Leiterelement, also einem Geradenstück, d.h. keinem Punkt, und dem punktförmigen Magnetfeld handelt.“

Trotz dieser Bedenken wendet Joos die Gleichung $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$ auf einen starren Körper an, indem er mit einfachen Spezialfällen beginnt und schließlich die EULERSchen Bewegungsgleichungen herleitet. Er sagt nichts über die Kräfte, die zwischen den Teilchen wirken, aus denen der Körper besteht. Wir müssen jedenfalls annehmen, daß die Anzahl dieser Teilchen endlich ist, denn $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$ war nur für endliche Systeme hergeleitet worden. Danach behandelt er kontinuierliche Medien, mit besonderer Bezugnahme auf elastische Körper im Gleichgewicht. Er behauptet, daß zweierlei Kräfte wirksam sind. Den Kräften, die sich „wie die Schwerkraft“ verhalten, müssen Kräfte, die „nur zwischen den unmittelbar aneinander grenzenden Bausteinen diesseits und jenseits der Trennfläche wirken“, hinzugefügt werden. Die Kräfte zweiter Art sind „nicht dem Rauminhalt unseres Volumenelements, sondern dem Flächeninhalt der Trennfläche proportional“. Die Kräfte erster Art mit \mathbf{g} , diejenigen zweiter Art mit \mathbf{P} bezeichnend, wendet Joos angeblich „die Grundgleichungen der Mechanik der Punktsysteme“ an:

$$(6) \quad \begin{cases} \int \mathbf{g} \, d\tau + \oint \mathbf{P} \, dS = 0, \\ \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, d\tau + \oint \mathbf{r} \times \mathbf{P} \, dS = 0. \end{cases}$$

Nach diesem Anfang leitet er verschiedene Gleichungen der Kontinuumsmechanik auf die übliche Weise ab, z.B. die Symmetrie des Spannungstensors. Er erwähnt den Drall nie wieder, und für kontinuierliche Medien schreibt er nie eine Gleichung der Form $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$ an. Er nimmt aber stillschweigend an, daß der Spannungstensor sowohl in kinetischen als auch in statischen Problemen der Elastizität und der Viskosität immer symmetrisch bleibt.

Ich wiederhole, das Buch von Joos ist nur deshalb gewählt worden, um an einem typischen Beispiel anzudeuten, wie der Fach-Physiker den Drall entwickelt und gebraucht. Die Lehrbuch-Literatur ist so umfangreich, daß zweifellos Variationen auftreten, aber meine Unterhaltungen mit Fach-Physikern haben mich überzeugt, daß ihre Ausbildung normalerweise in den oben angedeuteten Bahnen verlaufen ist.

Wenn überhaupt, dann betrachten nur wenige Vertreter der Mechanik ihr Fach in der obigen Weise. Für sie gründet sich die klassische Mechanik auf drei Grundgesetze, die die Erhaltung oder Bilanz von Kraft, Drehmoment und Arbeit oder auch von Impuls, Drall und Energie behaupten. Für sie drückt die Gleichung $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$ selbst den Inhalt des zweiten Grundgesetzes aus. Sie betrachten den Drallsatz nicht als eine Folge des linearen Impulssatzes oder der „NEWTONSchen Gesetze“ oder irgend eines anderen besser bekannten Prinzips.

Der Vertreter der Mechanik findet leicht ein halbes Dutzend logische und methodische Fehler in der üblichen Behandlung des Fach-Physikers. Die Gleichung $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$ als Grundgesetz anzusehen, wird dagegen nur selten vom Fach-Physiker gebilligt; er beharrt darauf, daß $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$ aus den „NEWTONSchen Gesetzen“ hergeleitet worden ist oder wenigstens hergeleitet werden sollte. Seine extreme Ehrfurcht vor der Methode, die er NEWTON zuschreibt, scheint das Motiv für seine Neigung zu sein, jede Kritik derselben und jede prinzipielle Abweichung davon als mathematische Spitzfindigkeit abzuweisen.

Diese ganze Frage beabsichtige ich, anderswo gründlich zu behandeln. In diesem Vortrag möchte ich eine historische Untersuchung einleiten. Wie sind die beiden Anschauungen entstanden, und wie haben sie sich getrennt? Wer hat den Drallsatz entdeckt? Ich habe noch nicht alles, was ich suche, gefunden. Aber Forschungen in der Geschichte der rationalen Mechanik scheinen mir noch soviel Neuheitswert zu haben, daß es nicht unwillkommen sein mag, wenn ich Ihnen die Methoden dieser Forschung an einem Beispiel illustriere, und zwar schon bevor es sich ergeben hat, welche der Vermutungen richtig sind, und welche Spuren zu etwas führen.

Zuerst müssen wir entscheiden, wonach wir eigentlich suchen. Indem wir der Physik, der Metaphysik und allen Vorurteilen den Rücken kehren, müssen wir, wenn wir etwas Solides gewinnen wollen, zunächst einmal sehen, wie der Drallsatz heutzutage angewandt wird. Für Systeme von Massenpunkten dient er lediglich als Hilfsmittel bei der Integration der Bewegungsgleichungen. Diese Tatsache unterstützt den Standpunkt der Physiker, nämlich, daß er nur ein hergeleiteter Hilfssatz ist. Für starre oder deformierbare Körper nützt er wenig bei der Lösung von Spezialproblemen; vielmehr ist er einer der beiden Grundgesetze, aus denen man gewöhnlich die Bewegungsgleichungen herleitet. Für einen starren Körper ergibt der Drallsatz die EULERSchen Gleichungen und für einen deformierbaren Körper die Symmetrie des Spannungstensors. Wenn wir hier versuchen, den Physikern zu folgen, dann sehen wir, daß für sie der Drallsatz dazu dient, die Angabe der Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen eines starren oder deformierbaren Körpers unnötig zu machen. Es reicht aus, daß diese Wechselwirkungen nichts zum resultierenden Drehmoment beitragen. In diesem Sinne

wollen wir das Problem verstehen. Nicht das triviale Ergebnis, das sich aus der Addition der Vektorprodukte von (1) mit \mathbf{r}_k ergibt, soll für uns als Drallsatz gelten, vielmehr soll der Drallsatz die Gleichung $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$ sein, wo \mathbf{L} das Drehmoment der eingepprägten Kräfte allein ist, in der Form (4) für Systeme von Punkten oder allgemeiner für raumerfüllende Körper. Deshalb wollen wir die historischen Ursprünge der folgenden beiden Sätze suchen:

A. Das resultierende Drehmoment eines Systems von Wechselwirkungskräften verschwindet, sei es als Folge der „NEWTONSchen Gesetze“ oder anderswie.

B. Die Gleichung $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$ ist ein fundamentales, unabhängiges Gesetz der Mechanik.

Ein Anfänger mag vielleicht versuchen, den Satz A in den Principia von NEWTON nachzuschlagen; er würde aber bald bemerken:

Feststellung 1. In NEWTONS Principia findet sich weder Satz A noch Satz B. Ferner behauptet NEWTON nirgends, daß $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{jk} = 0$ gilt.

Physiker staunen oft über dies Ergebnis, manchmal so sehr, daß sie es einfach nicht glauben. Aber dies Ergebnis steht im Einklang mit dem weitverbreiteten Glauben an die empirische Natur der Wissenschaften. Für mich ist es das erste Prinzip der historischen Forschung in der Mechanik, daß der Sinn dem Gebrauch entnommen wird, denn erfolgreiche Anwendung ist jedesmal der Aussage eines Prinzips vorangegangen. Da in NEWTONS Buch weder eine Theorie der allgemeinen dynamischen Systeme, noch der starren Körper, noch der Spannungen in einem Kontinuum zu finden ist, sollte kein Empiriker überrascht sein, wenn er lernt, daß das System NEWTONS nicht allgemein genug war, um solche Theorien zu liefern. Da HUYGENS als erster ein nicht triviales Problem über die Drehung löste, nämlich das des Oszillationszentrums, mag ein Anfänger vielleicht dann versuchen, das Horologium Oscillatorium und andere Werke von HUYGENS zu lesen; er würde aber bald eine zweite Feststellung hinzufügen:

Feststellung 2. In der HUYGENSSchen Lösung für das Oszillationszentrum findet man überhaupt nichts in Hinsicht auf Satz A oder Satz B.

Keiner dieser beiden Feststellungen überrascht den wissenschaftlichen Historiker, denn auf Grund seiner allgemeinen Kenntnisse erwartet er vor der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts keine Entwicklung der allgemeinen Mechanik auf „NEWTONSchen“ Bahnen. Auch erwartet er nicht, daß der allgemeine Drallsatz vor seiner ersten wichtigen Anwendung aufgestellt wurde, nämlich vor der allgemeinen Theorie der Bewegung starrer Körper. Er wird wahrscheinlich erst den Stoff prüfen, wie er im ersten systematischen Lehrbuch der analytischen Dynamik, der *Mécanique Analytique* von LAGRANGE, dargestellt ist. Dieses Buch ist im Jahre 1788 erschienen, es halbiert also das Zeitintervall, das HUYGENS und NEWTON von den Lehrbuchschreibern des Endes des letzten Jahrhunderts trennt. In der *Mécanique Analytique* ist das Prinzip der virtuellen Arbeit das Grundgesetz der Mechanik, und LAGRANGE leitet daraus die allgemeinen Integrale der Energie, des Impulses und des Drehimpulses für ein Massenpunktsystem leicht ab. Da Kräfte, die keine Arbeit leisten, aus der Formel für die virtuelle Arbeit ausgelassen werden dürfen, können wir schließen, daß in den von LAGRANGE hergeleiteten Gleichungen der Form $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$ die Wechselwirkungskräfte zu \mathbf{L} nicht beitragen; LAGRANGE sagt das aber nicht. Wenn man die Erklärung eines Begriffs in den Schriften von LAGRANGE sucht, so sucht man meistens vergeblich. In diesem Falle finden wir nur, daß die Kräfte „diejenigen seien, die im gleichen Augenblick auf jeden Punkt der Masse m längs einer gegebenen Richtung wirken, d. h. die Geschwindigkeiten, die jede von diesen Kräften auf die Masse m einprägen würden, wenn sie getrennt und gleichmäßig während der als Einheit genommenen Zeit wirkten. Wie veränderlich auch die Wirkung dieser Kräfte sei, man darf sie während eines Augenblicks als konstant betrachten.“ Er spricht auch von den beschleunigenden Kräften als „Kräften, die nach gegebenen Zentren hinstreben“. Neben der lockeren Darstellung, die an die D'ALEMBERTSche Ausdrucksweise erinnert, sehen wir hier die typische ausweichende Verschwommenheit von LAGRANGE. In der Aufstellung des Flächensatzes gibt LAGRANGE Anlaß zum Verdacht, daß er in der Tat die Allgemeingültigkeit des Drehimpulsintegrals nicht erkennt, denn er führt nur Fälle an, worin das auf jeden einzelnen Körper wirkende Drehmoment verschwindet: „Wenn das System keiner beschleunigenden Kraft unterworfen wäre, oder wenn alle anwesenden Kräfte nur zu dem Punkt hinstreben, den wir als Koordinatenursprung gewählt haben . . .“ Durchsuchung übriger Teile des Buches bestätigt

Feststellung 3. In der *Mécanique Analytique* findet sich nichts über den Satz B. In bezug auf Satz A darf man aus LAGRANGES Behandlung schließen, daß keine virtuelle Arbeit

leistende Kräfte zum resultierenden Drehmoment nicht beitragen; LAGRANGE legt jedoch selber kein Zeugnis davon ab, daß er diese Tatsache wahrgenommen hat.

Der Historiker wird die *Mécanique Analytique* aus einem zweiten Grund nachschlagen, nämlich weil sie in den einführenden Abschnitten die erste Geschichte der Mechanik enthält. Wer diese Geschichte liest, kann es sich sparen, sekundäre Geschichtswerke zu berücksichtigen, da letztere in bezug auf die rationale Mechanik nicht viel mehr tun als die kleinen Skizzen von LAGRANGE zu zitieren, umzuschreiben, auszubauen oder in Einzelheiten zu korrigieren.

LAGRANGE schreibt: „... der Flächensatz ist anscheinend gleichzeitig von den Herren EULER, DANIEL BERNOULLI, und le Chevalier D'ARCY, aber in verschiedenen Formen entdeckt worden. Nach den beiden ersteren sagt dieser Satz aus, daß in der Bewegung mehrerer Körper um ein festes Zentrum die Summe der Produkte aus der Masse jedes Körpers mit der Zirkulationsgeschwindigkeit um das Zentrum und mit der Entfernung von diesem Zentrum immer unabhängig von der gegenseitigen Wirkung bleibt, welche die Körper aufeinander ausüben können, und daß diese Summe so lange konstant bleibt, als weder äußere Wirkungen noch äußere Hindernisse vorhanden sind. Das Prinzip von Herrn D'ARCY... besteht darin, daß die Summe der Produkte aus der Masse jedes Körpers mit dem Flächeninhalt, den sein Radiusvektor um ein festes Zentrum beschreibt, immer der Zeit proportional ist. Dies Prinzip ist offenbar eine Verallgemeinerung des schönen Satzes von NEWTON über den vermöge willkürlicher Zentripetalkräfte beschriebenen Flächeninhalt.“

Obwohl das Buch von LAGRANGE einen guten Ausgangspunkt bietet, bin ich damit aus eigener Erfahrung zu den folgenden Arbeitshypothesen geführt worden:

1. In der *Mécanique Analytique* war wenig Neues; sein Inhalt stammt meistens von früheren Abhandlungen von LAGRANGE selber oder von den Arbeiten EULERS oder anderer Vorgänger.
2. Allgemeine Prinzipien und Begriffe der Mechanik werden von LAGRANGE mißverstanden oder vernachlässigt.
3. LAGRANGES historische Angaben beziehen sich gewöhnlich auf die richtigen Quellen, verdrehen oder verringern jedoch ihren Inhalt.

Wenn wir LAGRANGES sarkastische Bemerkung über D'ARCY lesen: „... er machte daraus sogar eine Art metaphysisches Prinzip, das er die Erhaltung der Aktion benennt... als ob vage und willkürliche Namen das Wesen der Naturgesetze darstellten und durch geheime Wirksamkeit einige einfachen Folgerungen aus den bekannten Gesetzen der Mechanik zu endgültigen Ursachen erheben könnten“, dann weisen unsere Hypothesen 2 und 3 auf die Möglichkeit hin, daß D'ARCY etwas Solides hatte. Dies ist aber eine schlechte Spur; wir finden, daß D'ARCY $\dot{M} = 0$ für Körper voraussetzt, die „irgendwie aufeinander wirken, durch Drähte, durch biegsame Stangen, durch Anziehungs-Gesetze, usw.“. Als Grund führt er nur an: „Es ist bekannt, daß ein Körper, dessen Teile miteinander verbunden sind, sich nicht infolge ihrer gegenseitigen Wirkung bewegen kann“.

Im Hinblick auf Hypothese 1 können wir es vorziehen, zuerst LAGRANGES eigene frühere Arbeiten durchzugehen. Es ist aber langweilig, sich durch seine *Oeuvres* rückwärts hindurchzuarbeiten. Die Aufgabe wird durch Anwendung einer vierten Arbeitshypothese erleichtert.

4. Die besten Ideen von LAGRANGE in der Mechanik stammen aus seiner frühesten Periode, in der er die Abhandlungen EULERS studierte und noch nicht unter den persönlichen Einfluß D'ALEMBERTS geraten war.

Deshalb wenden wir uns sofort seiner Abhandlung von 1760 über das Prinzip der kleinsten Aktion zu. Hier finden wir das Flächeninhaltsintegral der Kinetik als Folgerung des Prinzips der kleinsten Aktion bewiesen, „wenn das System ganz frei ist, oder wenn es gezwungen ist, sich um einen festen Punkt zu bewegen, und wenn sämtliche auf die Körper wirkenden Kräfte in diesem Punkt zusammenkommen...“. Die gleichen Hinweise auf die Arbeiten EULERS, DANIEL BERNOULLIS und D'ARCYS wie in der späteren *Mécanique Analytique* werden auch hier angeführt. Das Gesetz $L = \dot{M}$ wird aber weder erwähnt noch benutzt.

Da das Durchsehen anderer Arbeiten über allgemeine Systeme von Massenpunkten nichts zur Beantwortung unserer Fragen enthüllt, müssen wir uns den Forschungen über raumerfüllende Massen zuwenden. Gleichzeitig sehen wir rasch, daß LAGRANGES Hinweise auf EULER und DANIEL BERNOULLI uns auf Abhandlungen bringen, in denen der starre Körper eine wesentliche Rolle spielt. Anstatt aber weiter rückwärts zu kriechen, springen wir jetzt bis an den Punkt, wo wir — hätten wir es nicht nötig gehabt, dem heute weitverbreiteten Glauben entgegen zu treten, daß der Massenpunkt der Anfang und das Ende der Mechanik sei — hätten beginnen sollen, nämlich mit der bedeutenden aus dem Jahre 1703 stammenden Abhandlung JAKOB BERNOULLIS über das Oszillationszentrum. Wie ihr Titel schon andeutet, wendet diese Abhandlung das Hebelprinzip auf die Bewegung eines Pendels an. Nun ist das Hebelprinzip

nichts anderes als das Gleichgewicht der Momente. Die Abhandlung von JAKOB BERNOULLI enthält bekanntlich den Keim des D'ALEMBERT-EULERSchen Prinzips der Äquipollenz der negativen Beschleunigungen mit Kräften pro Masseneinheit. Verbindung dieser beiden Prinzipie liefert sofort $L = \dot{M}$. Natürlich findet man nicht in BERNOULLIS Arbeit eine allgemeine Aussage von $L = \dot{M}$ oder auch nur eine explizite Aussage für den Fall des Pendels; wir erkennen aber die Anwendung von $L = \dot{M}$ zur Bestimmung des Oszillationszentrum. Die Frage ist nun, ob BERNOULLI versuchte, das erweiterte Hebelprinzip aus etwas anderem herzuleiten, oder ob er es als unabhängiges Axiom erkannte. Er folgerte es aus dem „Prinzip des von sich bewegenden Kräften gezogenen oder geschobenen Hebels, das“ — so sagte er — „von dem seeligen Herrn MARIOTTE in Satz 13 des zweiten Teils seines Werkes Über den Zusammenstoß von Körpern demonstriert worden ist; und niemand ist damit nicht einverstanden“. Nun, MARIOTTE „demonstrierte“ diesen Satz durch Experimente. Wir dürfen daran zweifeln, daß diese Experimente das Prinzip, in der von BERNOULLI angewandten Form, wirklich bewiesen; aber nur Einbildung könnte uns verleiten, daß BERNOULLI sein Prinzip als eine Konsequenz der NEWTONSchen oder irgendwelcher anderer damals bekannter Gesetze ansah. Vielmehr suchte und fand er in dem erweiterten Hebelprinzip eine neue und allgemeine Methode der Kinetik, indem er ausdrücklich in bezug auf das spezielle von HUYGENS benutzte Postulat bemerkte, „es gibt eine Menge von Leuten, denen diese Forderung ein wenig zu kühn erscheint und die niemals haben zustimmen können, daß sie offensichtlich sei“.

Wir können nun die Idee ein wenig zurückverfolgen, bis zu JAKOB BERNOULLIS erstem und etwas unrichtigem Versuch, 1686 veröffentlicht, dessen Basis l'HOSPITAL als ein Prinzip erkannte, „welches nichts Anderes als das Hebelprinzip ist“. In diesem früheren Versuch zitiert überdies BERNOULLI kein Beweismaterial — weder theoretisch noch experimentell — für sein Prinzip.

Deshalb behaupte ich die

1. Vermutung. Den Drallsatz, als unabhängiges Gesetz der Mechanik und als kinetische Verallgemeinerung des statischen Gleichgewichtsprinzips der Drehmomente, verdanken wir JAKOB BERNOULLI (1686). Es geht den NEWTONSchen Gesetzen (1687) voraus.

Natürlich sprach BERNOULLI das Prinzip weder klar noch in großer Allgemeinheit aus, er behauptete auch nicht, daß es nicht aus den später von NEWTON zu veröffentlichenden Gesetzen gefolgert werden könnte. Wir müssen jetzt aufdecken, wie das Prinzip benützt und entwickelt worden war, bis es die Allgemeinheit erreichte, in der Theoretiker der Mechanik es heute begreifen. Wie LAGRANGE bemerkte, stellten DANIEL BERNOULLI und EULER Formen des Prinzips auf, und zwar im Zusammenhang mit ihren Lösungen des Problems der Bewegung eines Massenpunktes in einem sich drehenden starren Rohr. EULERS Methode ist die gleiche wie JAKOB BERNOULLIS, sie ist aber klarer dargestellt, und EULER schreibt explizit die Gleichung $L = \dot{M}$ für den Fall einer ebenen Bewegung um eine feste Achse (d. h. $L = I\alpha$); sein angeblicher Beweis ist jedoch nicht mehr als die Behauptung des erweiterten Hebelprinzips. DANIEL BERNOULLI erhielt dasselbe Ergebnis, aber er versuchte es aus anderen Prinzipien zu beweisen: „... die gegenseitige Wirkung zwischen dem Rohr und dem Ball stört das oben erwähnte (Dreh-) Moment nicht“. Er behauptet, daß die „Wirkung“ des Rohrs auf den Ball und des Balls auf das Rohr zum Rohr senkrecht sei, er ersetzt dann diese „Wirkung“ durch einen kleinen die beiden verbindenden Faden. So üben Ball und Rohr gleiche und entgegengesetzte Kräfte aufeinander aus. DANIEL BERNOULLIS Auffassung von seinem Vorgehen können wir seinem Brief vom 4. Februar 1744 an EULER entnehmen: „... Ich habe das Prinzip der Erhaltung des Moments der Drehung aus den gewöhnlichen Prinzipien hergeleitet und bewiesen...“. Deshalb behaupte ich die

2. Vermutung. Die Idee, daß das Drehimpulsgesetz eine Folgerung aus dem linearen Impulsgesetz sei, in dem Sinne, daß die gegenseitigen Wirkungen eines Systems von Körpern kein resultierendes Drehmoment ausüben, verdanken wir DANIEL BERNOULLI (1744).

Mit diesem Ergebnis sind wir prinzipiell von den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers als Folge des linearen Impulsgesetzes nicht mehr weit; zuerst bemerke ich aber einen Schritt in der entgegengesetzten Richtung.

3. Vermutung. In einem Werk von 1744 benutzte EULER als erster die Prinzipie des Impulses und des Drehimpulses als unabhängige Gesetze der Mechanik, um die Bewegungsgleichungen eines Systems aufzustellen.

Der von ihm gebrauchte Spezialfall des Drallsatzes führte DANIEL BERNOULLI doch nicht zu den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. In einem Brief vom 4. Dezember 1745

an EULER beschrieb er das allgemeine Problem der drehenden Bewegung als „ein sehr schwieriges, das von niemand leicht gelöst wird . . . man mag fragen, wie man die Drehachse so bestimmen kann, daß die Zentrifugalkräfte sich gegenseitig zerstören“. Während BERNOULLI das Problem fallen ließ, erreichte EULER durch geduldige Erforschung immer allgemeinerer Fälle letzten Endes die Bewegungsgleichungen eines willkürlichen starren Körpers. Er veröffentlichte sie in einer 1750 geschriebenen Abhandlung, Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik, wo das Prinzip des linearen Impulses, das sogenannte „zweite NEWTONSche Gesetz“, als ein Axiom aufgestellt wird, „das alle Gesetze der Mechanik in sich einschließt“, wenn man es auf jedes Massenelement in jedem Körper anwendet. Das Endergebnis der Abhandlung sind „die EULERSchen Bewegungsgleichungen“ für starre Körper. Wie kann das sein? EULER behauptet, unter den Kräften seien „sowohl solche äußere Kräfte, die auf den Körper von außen wirken, als auch die inneren Kräfte, die die Teile des Körpers miteinander binden, so daß sie ihre relative Lage nicht ändern. Es sei aber bemerkt, daß die inneren Kräfte sich gegenseitig zerstören, so daß der Fortgang der Bewegung keine äußere Kräfte erfordert, ausgenommen, wenn jene Kräfte sich nicht gegenseitig zerstören“. EULER erhält daraufhin die Bewegungsgleichung durch Berechnung der Momente der Gleichungen des linearen Impulses für die einzelnen Massenelemente, indem er etwaige Wechselwirkungskräfte überhaupt nicht in Betracht zieht. Seine Methode ist so derjenigen von DANIEL BERNOULLI ähnlich, aber weil er sieht, daß Wechselwirkungskräfte keinen Effekt haben, macht er keine spezifische Annahme über ihre funktionale Abhängigkeit oder ihre Richtungen. Im wesentlichen behauptet er, die Gleichung $L = \dot{M}$ sei eine Folge des linearen Impulsgesetzes, falls die Wechselwirkungskräfte derart sind, daß sie die Starrheit erhalten. Der heutige Theoretiker der Mechanik, der immer an den allgemeinen Fall eines deformierbaren Körpers denkt, für den $L = \dot{M}$ im allgemeinen keine Folge des Prinzips des linearen Impulses ist, sieht den Abgrund, an dem EULER sich hier bewegte; wie üblich stürzte er nicht ab.

EULERS Lehrbuch über die starren Körper ist so weitschweifig, daß sich der Gedankenweg in der Vielheit der Spezialfälle verbirgt; es scheint aber die Sache auf derselben Basis zu behandeln.

Das allgemeine Problem ist dann von LAGRANGE betrachtet worden. Seine „neue Lösung“ von 1773 beginnt: „Ich betrachte den gegebenen Körper als eine Ansammlung von Korpuskeln oder Massenpunkten, die miteinander auf solche Weise verbunden sind, daß sie immer ihre gegenseitigen Entfernungen beibehalten . . . Ich erhalte nach den Prinzipien der Mechanik, da das System als um einen Punkt frei beweglich, aber keiner weiteren äußeren Kraft unterworfen angenommen ist — ich erhalte, sage ich, sofort, diese . . . Gleichungen“, worauf LAGRANGE die Integrale des Drehimpulses und der kinetischen Energie für ein freies Massenpunktsystem niederschreibt. Er sagt, sie ergeben sich aus einem „bekanntem Prinzip“ das für „jedes System irgendwie aufeinanderwirkender Körper“ zutrifft. Der angebliche Beweis ist nur eine Wiederholung. Diese typische Verschlossenheit und die nachfolgende Wolke von Rechnungen bewegte EULER zur Antwort: „. . . aber als ich mit der größten Gewissenhaftigkeit versuchte, seinen höchst tiefsinnigen Gedanken in allen Einzelheiten zu folgen, bin ich wahrhaft nicht fähig gewesen, mich durch alle seine Rechnungen hindurch zu zwingen. Sogar das erste Lemma schrak mich so ab, daß ich meiner Blindheit wegen nicht hoffen konnte, sämtliche von ihm angewandten Kunstgriffe der Analysis durchzuprüfen“. In dieser neuen, im Jahre 1775 geschriebenen Abhandlung legte der alte EULER als fundamentale, allgemeine, und voneinander unabhängige Gesetze der Mechanik für jede Bewegung von Körpern jeder Art die Prinzipie von dem linearen Impuls und dem Drehimpuls für jedes Körperelement zugrunde. Zur Rechtfertigung schrieb er nur, „. . . Nach den Prinzipien, ist es notwendig, daß . . .“. Die beiden Prinzipien, die sich in den folgenden Integralformen schreiben lassen:

$$(7) \quad F = \dot{P}, \quad L = \dot{M},$$

dürfen mit Recht die EULERSchen Gesetze der Mechanik benannt werden.

Was gab EULER in seiner letzten Arbeitsperiode Anlaß, zu den Ideen von JAKOB BERNOULLI zurückzukehren und den Versuch fallen zu lassen, das durch Einschränkungen der Wechselwirkungskräfte ergänzte Prinzip des linearen Impulses als für die ganze Wissenschaft der Mechanik ausreichend zu betrachten? Die Antwort ist, wie immer, in der Praxis, und nicht in der Philosophie der Disziplin, zu suchen. Die Auffassung, daß die „NEWTONSchen Gesetze“ oder eins der gewöhnlich heute so bezeichneten Gleichungssysteme hinreichen, kann nur von denen aufrechterhalten werden, die ihr Augenmerk auf Massenpunkte, starre Körper, und andere spezielle Systeme beschränken. Jeder moderne Theoretiker weiß das und bemerkt sofort die Ausflüchte, die in den typischen Darstellungen, wie etwa der oben beschriebenen von Joos, verwendet werden, um die für deformierbare Körper passende Form (6) zu bekommen. Im achtzehnten Jahrhundert beschränkte sich die Mechanik flüssiger Körper, so weit sie als

ausgearbeitete Theorie vorhanden war, auf reibungslose Flüssigkeiten, für die das Prinzip des linearen Impulses wieder ausreicht. Aber in der Elastizitätstheorie haben die „NEWTONschen Gesetze“ nie ausgereicht und werden es auch nie können: Die einfachsten Probleme der Elastizitätstheorie stützen sich auf die Bilanz der Momente, und wenn wir lieber den Körper als aus Molekülen bestehend betrachten wollen, die aufeinander mit Wechselwirkungskräften wirken, dürfen diese Kräfte nicht unbeachtet bleiben. In der Elastizitätstheorie sind die von JOOS als „nicht dem Volumen des Elements sondern seinem Flächeninhalt proportional“ beschriebenen Kräfte wesentlich, und Joos hätte besser getan, diese Kräfte anstatt des BRUSSAVARTSchen Gesetzes als die Allgemeinheit der „NEWTONschen Gesetze“ in Zweifel bringend anzuführen. Ein molekularer Zugang zur Elastizitätstheorie ist von Anfang zu Ende mit Schwierigkeit beladen, wie jeder weiß, der die klassischen und modernen Theorien des festen Zustands angesehen hat. Im achtzehnten Jahrhundert zog jeder, der Probleme der Elastizitätstheorie untersuchte, das Prinzip der Drehmomente heran. Also endlich, wenn wir den Ursprung des als unabhängig betrachteten Prinzips des Drehimpulses finden sollen, müssen wir die Geschichte der Theorien elastischer Stoffe durchsuchen. Anderswo habe ich dies getan. Sein langes Leben hindurch studierte EULER biegsame oder elastische Linien in verschiedenen Fällen, indem er sich langsam auf größere Allgemeinheit hin bewegte. Ununterbrochen strebte er nach einer einzigen Mechanik, die Systeme aller Art einschließen sollte. Es ist ihm gelungen, zu beweisen, daß für eine vollkommen biegsame Linie entweder die Bilanz der Kräfte oder auch die Bilanz der Momente hinlänglich ist, um die Gleichungen des Gleichgewichts herzuleiten; für ein solches System sind dann die beiden Prinzipie gleichwertig. Für eine elastische Linie wurde die Bilanz der Momente von Anfang an angewandt, und keine Anstrengung oder Annahme machte es ihm je möglich, die Momente zugunsten der Kräfte aufzugeben. Ferner führt das D'ALEMBERT-EULERSche Prinzip der negativen Beschleunigungen nicht auf die Bewegungsgleichungen, wenn man es auf die durch Bilanz der Momente erhaltenen Gleichgewichtsbedingungen einer elastischen Linie anwendet. Was sind denn dann die Bewegungsgleichungen einer elastischen Linie? 1771, nach der Veröffentlichung seines Buches über die starren Körper aber vor seiner Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgesetze (7), sah EULER endlich, daß alle bis dahin gewonnenen Ergebnisse über die Elastika von speziellen Eigenschaften der Stoffgleichung anstatt von den Prinzipien der Mechanik herrührten. Im wesentlichen zum Programm von JAKOB BERNOULLI zurückkehrend, suchte er die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung für ein willkürliches ebenes Kontinuum, unabhängig von seiner stofflichen Konstitution. Zu diesem Zweck sind sowohl die Bilanz der Kräfte als auch die Bilanz der Momente unvermeidlich; keine von beiden reicht allein aus. Anwendung des D'ALEMBERT-EULERSchen Prinzips auf die Gleichungen des Gleichgewichts der Kräfte liefert dann die gewünschten Bewegungsgleichungen. EULERS Endergebnis lautet

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial s} + V \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left(-F_x + \sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \sin \varphi + \left(-F_y + \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \cos \varphi, \\ \frac{\partial V}{\partial s} - T \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left(-F_y + \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \sin \varphi - \left(-F_x + \sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \cos \varphi, \\ \frac{\partial M}{\partial s} - V = 0. \end{cases}$$

wo T die Spannung ist, V die Querkraft, M das Spannungsmoment, F die äußere Kraft, σ die Massendichte, φ der Neigungswinkel, $x = x(s, t)$ und $y = y(s, t)$ die Komponenten des Ortsvektors. Diese Gleichungen entsprechen den Gln. (6); da sie kinetisch sind, sind sie allgemeiner, aber da das Kontinuum nur eine ebene Kurve ist, sind sie spezieller. Die Gleichungen (8) liefern das erste Beispiel der allgemeinen Gleichungen der Mechanik, unabhängig von der Natur der Wechselwirkungskräfte und der stofflichen Eigenschaften.

Also es mag wohl die Notwendigkeit gewesen sein, die Gleichung $L = \dot{M}$ als ein von den „NEWTONschen Gesetzen“ unabhängiges Prinzip in einem Fall anzuwenden, in dem die „NEWTONschen Gesetze“ noch nie als zutreffend oder als nutzvoll bewiesen worden sind, die EULER den Anlaß gab, jede Verweisung auf Wechselwirkungskräfte im Aufstellen seiner allgemeinen Gesetze (7) der Mechanik fallen zu lassen. Deshalb bilde ich die

4. Vermutung. Das allgemeine Drehimpulsgesetz als unabhängig vom Prinzip des linearen Impulses und als auf jeden Teil jedes Körpers anzuwendendes Prinzip wurde von EULER als erstem im Jahre 1775 vorgeschlagen. Er ist dazu durch seine Studien über elastische Linien geführt worden, die 1771 in seiner allgemeinen Theorie des ebenen linearen Kontinuums gipfelt.

Ferner, die Entwicklung des Verstehens der Natur und der Wichtigkeit des Dralls ist von der Entwicklung des Begriffs der Spannung in einem Kontinuum untrennbar. Hier aber will ich die Sache mit den Untersuchungen von CAUCHY nicht verfolgen.

Unser Forschen nach den Quellen hat noch nicht den Satz A aufgedeckt, obwohl wir Schritte in dieser Richtung in Arbeiten von DANIEL BERNOULLI (1744), EULER (1752), und LAGRANGE (1788) bemerkt haben. Das früheste Vorkommen des Satzes, das ich bis jetzt gefunden habe, befindet sich in einem Lehrbuch von POISSON:

5. Vermutung. Behauptung und Beweis, daß ein System sich paarweise im Gleichgewicht haltender Zentralkräfte kein resultierendes Drehmoment ausüben, verdankt man POISSON (1833).

Der Beweis von POISSON ist der, den man in den heutigen Büchern findet. Er erwähnt „das allgemeine Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion“, das „in der Natur immer herrscht“, und er sagt, „man bemerkt immer“, daß $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{jk} = 0$.

Mit POISSON haben wir aber immer noch einigen Abstand von den heutigen NEWTONIANERN. Die oben zitierten Bemerkungen kommen auf S. 447 von Band 2 vor, so daß es kaum wahrscheinlich ist, daß POISSON sie als von grundlegender Bedeutung für die allgemeine Mechanik betrachtete. Z. B. ist die Theorie der starren Körper viel weiter vorher gegeben worden. Abgesehen von der oben zitierten Angabe der Gleichungen $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$ und $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{jk} = 0$, die öfters „das dritte NEWTONSche Gesetz“ benannt werden, scheint im ganzen Buch kein anderer Hinweis auf die Gesetze von NEWTON vorzukommen, weder die von NEWTON selbst ausgesprochenen Axiome noch die in den heutigen Lehrbüchern als „NEWTONSche Gesetze“ angeführten Gleichungen; ich habe auch den Namen NEWTONS nicht anderswo im Buch gefunden.

Nach alledem können wir jetzt fragen, wer als erster die Vorstellung hatte, daß die „NEWTONSchen“ Gleichungen als Basis für die gesamte Mechanik dienen können? Gewiß keiner von den Schöpfern der Mechanik, es sei denn vielleicht NEWTON selber. Eine solche Auffassung widerspricht den Inhalt fast jeder beliebigen Seite aus den Werken von den BERNOULLIS, von EULER, von D'ALEMBERT, oder von LAGRANGE, sie paßt aber gut zu den Ansichten, die ein Jahrhundert später verbreitet waren. 1867 behaupteten KELVIN und TAIT das Supremat der NEWTONSchen Gesetze in Worten, die bald von MACH nachgesprochen werden sollten, obwohl sie nach einigen einleitenden Schritten stattdessen als ihr Axiom das LAGRANGESche Prinzip der virtuellen Arbeit wählten. KIRCHHOFF schrieb als „den allgemeinsten in der Mechanik der Massenpunkte zu betrachtenden Fall“ umfassend die „NEWTONSchen“ Gleichungen nieder mit einer besonderen Klasse von Kräften, nämlich denjenigen, die vorgeschriebene Funktionen der Orte, der Geschwindigkeiten und der Zeit sind, und zudem erlaubt er auch solche Kräfte, die aus holonomen Nebenbedingungen entstehen.

Zwischen 1833 und 1867 geschah eine grundlegende Änderung in der Mechanik, eine Änderung nicht in der Disziplin selbst sondern in ihrer Pädagogik. Um diese Änderung zu beschreiben, wäre ein zweiter Vortrag nötig, vielleicht ein langweiligerer, denn er würde darlegen, wie eine Wissenschaft stirbt. In allen Gebieten außerhalb der Naturwissenschaften neigen moderne Denker dazu, den von ihren Großvätern ersonnenen Mythos des „Fortschritts“ zu bezweifeln. Vielleicht sollte die Naturwissenschaft auch ihre Zweifel nach innen wenden.

Obwohl dies ein rein historischer Vortrag sein sollte, kann ich mir nicht verkneifen, ein Wort über den Drallsatz, wie er von heutigen Pflegern der Mechanik betrachtet wird, hinzuzufügen. Für sie ist der Drallsatz immer und ohne jeden Zweifel ein wahres Grundprinzip der allgemeinen Mechanik. Wie alle Grundprinzipie, ist auch er durch eine Bilanzgleichung in Integralform auszudrücken:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}} \Psi \, dm = \oint_{\partial \mathfrak{B}} \mathbf{i}[\Psi] \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\mathfrak{B}} s[\Psi] \, dm.$$

Hier ist Ψ die Dichte (pro Masseneinheit) der in Betracht kommenden Größe (sie darf ein Tensor beliebiger Ordnung sein), \mathfrak{B} ist ein willkürlicher raumerfüllender Körper, d/dt ist die totale zeitliche Ableitung, \mathbf{i} ist der „Zufluß“ von Ψ , s ist die „Quelle“ von Ψ . In dieser Allgemeinheit werden keine Zusammenhänge zwischen Ψ , \mathbf{i} , und s vorausgesetzt. Wenn alle in (9) erscheinenden Felder genügend regulär sind, dann ist (9) folgender Feldgleichung äquivalent:

$$(10) \quad \rho \dot{\Psi} = \operatorname{div} \mathbf{i} + \rho s.$$

An einer Unstetigkeitsfläche ist aber (9) einer Kompatibilitätsbedingung äquivalent:

$$(11) \quad [\rho \Psi U] = [\mathbf{i}] \cdot \mathbf{n}.$$

wo die eckige Klammer einen Sprung bedeutet, und wo U die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche ist.

Es bleibt nun übrig, die Größen Ψ , i und s in geeigneter Weise zu bestimmen. Es gibt drei Leitfäden für die Erzeugung umfassender Begriffe der Mechanik. Erstens haben wir allgemeine Ideen über Bilanzgleichungen, mathematische Symmetrie und Vollständigkeit. Im Grunde genommen ist diese Methode eine Art Zusammenfassung aller vorangegangenen Theorien der Kontinua, insbesondere derjenigen von KIRCHHOFF, MAXWELL, VOIGT und E. u. F. COSSERAT. Zweitens kann man eine Motivierung aus molekularen Betrachtungen herleiten. Z. B. GRAD und ERICKSEN schlagen als Modell eines Moleküls eine Hantel oder ein komplizierteres System von Massenpunkten vor. Mit den gewöhnlichen Definitionen für Impuls, Drall, und Energie aus der analytischen Mechanik ergeben sich dann für die entsprechenden, mit dem Schwerpunkt des Systems verbundenen Größen verallgemeinerte Ausdrücke. Man betrachtet also das Kontinuum als einen Raum, der dicht mit solchen unendlich kleinen Massenpunktsystemen bepackt ist. Drittens kann man aus der eigentlichen statistischen Mechanik entsprechende Gleichungen herleiten. Ich spreche hier nicht von den gewöhnlichen Betrachtungen des statistischen Gleichgewichts (bzw. Schwankungstheorie) sondern vielmehr von der strengen, allgemeinen Theorie der Phasenmittel mit allgemeiner Wahrscheinlichkeit, wie ich sie z. B. in meiner Marburger Vorlesung 1957 und auch in meiner Varenna-Vorlesung 1960 über Ergodentheorie auseinandergesetzt habe.

Es sei die Motivierung wie sie will; wenn sie nur allgemein genug ist, gewinnt man Ergebnisse folgender Art.

	Ψ Dichte	$i[\Psi]$ Zufluß	$s[\Psi]$ Quelle
Impuls	π^k	$T^k{}_m$	b^k
Drall (antisymmetrisch)	${}_0\sigma^{km}$	${}_0\mu^{km}{}_q$	${}_0l^k{}_m$
Energie	${}_0E$	${}_0h^k$	${}_0q$

T^{km} bzw. b^k ist der Spannungstensor bzw. die Massenkraftdichte; die anderen Größen sind aber teilweise neu, d. h. Verallgemeinerungen klassischer Begriffe. Der vordere Index „0“ weist auf einen besonderen Koordinatenursprung hin. Die mit 0 bezeichneten Größen sind dann gegenüber Transformation des Bezugssystems nicht invariant; wir sagen, sie sind nicht indifferent.

Wir führen jetzt eine Grundidee moderner Kontinuumsmechanik ein: Kontaktkräfte sind immer indifferent. Z. B.:

$$\text{Drehmoment} = \text{Moment einer Kraft} + \text{Kräftepaar} .$$

Das Moment einer Kraft wird in Bezug auf einen besonderen Ursprung definiert und ist deshalb nicht indifferent; das Kräftepaar ist der indifferente Teil des Moments. Eine analoge Zerspaltung gilt für sämtliche Feldgrößen:

Momentanteil		Indifferenter Anteil
${}_0\sigma^{km} = 2 {}_0\rho^{[k}\pi^{m]}$	$+ \sigma^{km}$	(Spindrehmoment)
${}_0\mu^{km}{}_q = 2 {}_0\rho^{[k}T^{m]}{}_q$	$+ \mu^{km}{}_q$	(Momentenspannungstensor)
${}_0l^k{}_m = 2 {}_0\rho^{[k}b^{m]}$	$+ l^k{}_m$	(Massenmomentendichte)
${}_0E = \int^t \left(\dot{x}^k \dot{\pi}_k - \frac{1}{2} W_{km} \sigma^{km} \right) dt + \varepsilon$		(Innerer Energiedichte)
${}_0h^k = \dot{x}^m T_m{}^k - \frac{1}{2} W_{pr} \mu^{p r k}$	$+ h^k$	(Energiefluß)
${}_0q = \dot{x}^k b_k - \frac{1}{2} W_{km} l^k{}_m$	$+ q$	(Energiequelle)

${}_0p$ ist der Ortsvektor, W der Drehgeschwindigkeitstensor. Man gewinnt sofort folgende Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \rho \dot{\pi}^k &= T^{k m}{}_{,m} + \rho b^k , \\ \rho (\dot{\sigma}^{km} + 2 \dot{x}^{[k}\pi^{m]}) &= 2 T^{[m k]} + \mu^{k m r}{}_{,r} + \rho l^k{}_m , \\ \rho \dot{\varepsilon} &= - \rho \dot{x}^{[k}\pi^{m]} W_{km} + T^{(k m)} D_{km} - \frac{1}{2} \mu^{k m p} W_{km,p} + h^k{}_{,k} + \rho q . \end{aligned}$$

Hier ist \mathbf{D} der Streckungstensor. In den klassischen Theorien kontinuierlicher Medien setzt man definitionsgemäß:

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{l} = \mathbf{0}.$$

Dann folgen die beiden CAUCHYSchen Gesetze und die Energiegleichung von KIRCHHOFF-NEUMANN:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{x}^k &= T^{km}_{,m} + \rho b^k, \\ 0 &= T^{[km]} \\ \rho \dot{\varepsilon} &= T^{km} D_{km} + h^k_{,k} + \rho q. \end{aligned}$$

Die oben angeführten, viel allgemeineren Erhaltungsgleichungen verdanken wir TOUPIN. In seiner im Dezember 1962 veröffentlichten Theorie polarelastischer Medien schlägt er einen Fall mittlerer Allgemeinheit vor:

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\boldsymbol{x}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}.$$

D. h., er hält an den klassischen Definitionen des Impulses und des Dralls fest, erlaubt aber einen breiteren Begriff der Wirkung von der Materie auf diese Größen, indem er annimmt, daß im allgemeinen

$$\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{l} \neq \mathbf{0}.$$

Dann lauten die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \rho \ddot{x}^k &= T^{km}_{,m} + \rho b^k, & (1. \text{ CAUCHYSches Gesetz}) \\ 2 T^{[km]} &= \mu^{kmr}_{,r} + \rho l^{km}, & (\text{COSSERATSches Gesetz}) \\ \rho \dot{\varepsilon} &= T^{(km)} D_{km} - \frac{1}{2} \mu^{kmp} W_{km,p} + h^k_{,k} + p q. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden auch den Ausgangspunkt für ERICKSENS Theorien der anisotropen Flüssigkeiten.

Es ist bemerkenswert, daß der schiefsymmetrische Anteil $T^{[km]}$ des Spannungstensors überhaupt keine energetische Bedeutung hat. D. h., der Drallsatz wird von dem Impulssatz und von der Energiesatz völlig unabhängig. Der Drallsatz dient in der Tat dazu, um $T^{[km]}$ eindeutig zu bestimmen, sobald die Momentenspannung $\boldsymbol{\mu}$ und die Massenmomentendichte \boldsymbol{l} bekannt sind. Hier ist, ich glaube, der wahre Grundsinn des Drallsatzes.

Anschrift: Prof. C. TRUESDELL, The Johns Hopkins University, Baltimore 18, Maryland, USA