Das ist kein Skript!

Dennoch kann man hier sehen, welche Begriffe definiert wurden und welche Sätze bewiesen wurden. Bei vielen Sätzen ist der Beweis skizziert, so dass diese Zusammenfassung ideal für Studenten sein müsste, die die Vorlesung gründlich nachgearbeitet haben.

1 Erzeugende Funktionen

13.04.16 **1.1 Der Polynomring** $R[X]$
Definition des Polynomrings $R[X]$ für einen kommutativen Ring R mit $1 \in R$.
Wiederholung zu $K[X]$: Division mit Rest, Grad, ...
Polynome und Polynomiale Abbildungen $\varphi : K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K)$.
Prop: Das Polynom f ist ein Vielfaches von $X - a \iff f(a) = 0$ gilt.
Satz: Ein Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen.
Satz: Ist K ein Körper mit unendliche vielen Elementen, dann ist die obige Abbildung $\varphi : K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K)$ injektiv aber nicht surjektiv.
Bijektion: $\{$ Folgen $a_n \in R$ mit $a_n = 0$ für $n \gg 0\} \longleftrightarrow R[X]$

Übung 1.1 Zeigen Sie, dass $R[X]$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.
Übung 1.2 Beweisen Sie die Formel $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ für zwei Polynome $f, g \in K[X]$. (Erinnerung: K ist ein Körper.)
Übung 1.3 Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie dass die Abbildung
$\varphi : K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K)$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.
Übung 1.4 Sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Wir betrachten das Polynom

$$f_k = \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n} X^n \in \mathbb{Q}[X]\,.$$

(i) Beweisen Sie, dass $f_k = (1 + X)^k$ ist.
(ii) Folgern Sie aus $f_k \cdot f_m = f_{k+m}$ eine Formel für $\binom{k+m}{n}$.
(iii) Berechnen Sie $\tilde{f}_k(1)$ und geben eine Folgerung an!
(iv) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial X}\tilde{f}_k$ und geben eine Folgerung an!

20.04.16 **1.2 Der Ring** $R[\![X]\!]$
Definition des Ringes $R[\![X]\!]$ der formalen Potenzreihen. Beispiele
Prop.: Ist $f \in R[\![X]\!]$ und $f(0)$ eine Einheit in R, so ist f eine Einheit in $R[\![X]\!]$.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1-X-X^2} &= 1 + X + 2X^2 + 3X^3 + 5X^4 + 8X^5 + \ldots \\ &= \sum_{n \geq 0} f_n X^n \qquad \text{mit } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{aligned}$$

Zur Konvergenz formaler Potenzreihen für Ringe $R \subset \mathbb{C}$.
Die erzeugenden Funktion von Folgen vom Typ $a_{n+1} = Aa_{n+1} + Ba_n$.

Übung 2.1 Wir betrachten die durch $a_0 = A$ und $a_{n+1} = qa_n$ gegebene Folge komplexer Zahlen. Geben Sie die erzeugende Funktion $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ in der Form $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ für zwei Polynome $g, h \in \mathbb{C}[X]$

Übung 2.2 Berechnen Sie die Koeffizienten der Potenzreihe $f(X) = \frac{1}{1-a\cdot X}$. Was ist der maximale Betrag einer komplexen Zahl z, so dass die obige Potenzreihe von $f(z)$ konvergiert?
Übung 2.3 Wir betrachten die rekursiv gegebene Folge:

$$a_0 = 2\,, \quad a_1 = 3 \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n\,.$$

Geben Sie die erzeugende Funktion in der Form $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ für zwei Polynome $g, h \in \mathbb{C}[X]$ an und leiten Sie daraus eine explizite Formel ab!
Übung 2.4 — Herausforderung!
Zeigen Sie, dass sich die erzeugende Funktion f der Folge

$$a_0 = 0 \text{ und } a_n = \frac{1}{n} \text{ für } n \geq 1$$

nicht in der Form $f = \frac{g(x)}{h(x)}$ für zwei Polynome $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ schreiben läßt!

27.04.16

1.3 Lineare Rekursionen und rationale Funktionen

Definition: Lineare Rekursion
Satz: Durch die erzeugende Funktion wird eine Bijektion zwischen rationalen Funktionen $f = \frac{g}{h} \in K[\![X]\!]$ und Folgen gegeben, die einer linearen Rekursion genügen. Genauer: Sei $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$, so gilt

$$a_l = \sum_{k=1}^{m} a_{l-k} b_k \text{ für alle } l \gg 0 \iff f \cdot h \in K[X] \text{ mit } h = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k X^k\,.$$

Dazu einige Beispiele, wie beispielsweise

$$a_0 = A,\ a_1 = B,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \implies f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k = \frac{A + (B-A)X}{1 - X - X^2}$$

Satz (Hauptsatz der Algebra, ohne Beweis): Ist $h = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, so existieren komplexe Zahlen α_i, so dass $h = \prod_{k=1}^{m}(1 - \alpha_k X)$ gilt.
Satz: Ist $h = \prod_{k=1}^{m}(1-\alpha_k X)^{m_k} \in K[X]$, wobei $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i < j$ und $\deg(g) < \deg(h)$, so existieren Elemente $a_{kl} \in K$, so dass

$$\frac{g}{h} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{a_{kl}}{(1-\alpha_k X)^l}\,.$$

Dazu ein Beispiel:

$$a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \implies f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k = \frac{2-5X}{1-5X+6X^2} = \frac{1}{1-2X} + \frac{1}{1-3X}$$

$$f = \sum_{k\geq 0} (2^k + 3^k) X^k \implies a_k = 2^k + 3^k\,.$$

Übung 3.1 Wir betrachten die rationale Funktion $f = \frac{1-X+X^2}{1-2X-3X^2-4X^3}$ geben Sie die ersten Koeffizienten der Potenzreihe $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ an und geben Sie die lineare Rekursion der Koeffizienten an!

Übung 3.2 Wir betrachten die folgende rekursiv gegebene Folge:

$$a_k = 2 \text{ für alle } k < 5 \text{ und } a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} \text{ für alle } k \geq 5\,.$$

Geben Sie die erzeugende Funktion $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ als rationale Funktion an.

Übung 3.3 Wir betrachten die folgende rekursiv gegebene Folge:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 1,\ a_l = 2a_{l-1} + 3a_{l-2} \text{ für alle } l \geq 2\,.$$

Geben Sie die erzeugende Funktion $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ als rationale Funktion an, führen Sie die Partialbruchzerlegung durch und geben anschließend eine explizite Formel für die a_k an!

Übung 3.4 Finden Sie eine explizte Formel für die Folge aus Aufgabe 3.2!

04.05.16

1.4 Partialbruchzerlegung und explizite Form für linear rekursiv gegebene Folgen.

Wir begannen mit einem Beweis des folgenden Satzes:

Satz: Ist $h = \prod_{k=1}^{m}(1-\alpha_k X)^{m_k} \in K[X]$, wobei $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i < j$ und $\deg(g) < \deg(h)$, so existieren Elemente $a_{kl} \in K$, so dass

$$\frac{g}{h} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m_k} \frac{a_{kl}}{(1-\alpha_k X)^l}\,.$$

$$\text{Beispiel 1:} \quad \frac{1+X+X^2}{(1-X)(1-2X)(1-3X)} = \frac{13}{2(1-X)} - \frac{7}{1-2X} + \frac{3}{2(1-x)}$$

$$\text{Beispiel 2:} \quad \frac{2}{1+X^2} = \frac{1}{1+iX} + \frac{1}{1-iX} \implies \int \frac{dX}{1+X^2} = \arctan(X)$$

Proposition: Für alle natürlichen Zahlen $m \geq 0$ gilt die Formel:

$$\frac{1}{(1-\alpha X)^{(1+m)}} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+m}{m} \alpha^k X^k\,.$$

Hinweis zu den übungen: Die aufgabe 4.4 ist etwas schwieriger, wer sie aber bearbeitet kann dann mit sehr wenig Aufwand die drei restlichen Aufgaben bearbeiteten.

Übung 4.1 Geben Sie die explizite Formel der durch

$$a_0 = 2\,, \quad a_1 = 7 \qquad \text{und } a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$$

gegebenen Folge an!

Übung 4.2 Geben Sie die explizite Formel der durch

$$a_0 = -2\,, \quad a_1 = 12\,, \quad a_2 = -4 \qquad \text{und } a_{n+3} = 12a_{n+1} + 16a_n$$

gegebenen Folge an!

Übung 4.3 Geben Sie die explizite Formel der durch

$$a_0 = 2\,,\quad a_1 = 0\,,\quad a_2 = 0 \qquad \text{und } a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n$$

gegebenen Folge an!

Übung 4.4 Seien $\{b_i\}_{i=0,\dots,m-1}$ komplexe Zahlen. Geben Sie eine Basis aller Folgen a_n mit der Eigenschaft $a_{n+m} = \sum_{k=0}^{m-1} b_k a_{n+k}$ in Abhängigkeit von den Nullstellen α_i (mit Vielfachheiten m_i) des Polynoms $h = X^m - \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k$ an!

11.05.16 **1.5 Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für beliebige $n \in \mathbb{C}$**

Rechentricks für das direkte Berechnen der expliziten Darstellung linear rekursiv gegebener Folgen.

Beispiel: $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_{k+3} = 12a_{k+2} - 48a_{k+1} + 64a_k \implies a_k = (k^2 - 3k + 2)4^k$.

Definition: Für $n \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir: $\displaystyle\binom{n}{k} := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$.

Satz: Für alle $n \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}$ mit $\|x\| < 1$ haben wir die Identitat

$$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k\,.$$

Dazu einige Beispiele:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \tfrac{7}{256}x^5 - \tfrac{21}{1024}x^6 + \tfrac{33}{2048}x^7 - \tfrac{429}{32768}x^8 + \dots \\
(1+x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \tfrac{10}{243}x^4 + \tfrac{22}{729}x^5 - \tfrac{154}{6561}x^6 + \tfrac{374}{19683}x^7 + \dots \\
(1+x)^{\frac{2}{3}} &= 1 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{4}{81}x^3 - \tfrac{7}{243}x^4 + \tfrac{14}{729}x^5 - \tfrac{91}{6561}x^6 + \tfrac{208}{19683}x^7 + \dots \\
(1+4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k\geq 0} \tfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\tbinom{2k}{k}x^k \\
&= 1 + 2\,x - 2\,x^2 + 4\,x^3 - 10\,x^4 + 28\,x^5 - 84\,x^6 + 264\,x^7 - 858\,x^8 + \dots
\end{aligned}$$

Übung 5.1 Geben Sie die ersten vier Glieder der Potenzreihe von $(1+9x)^{\frac{1}{3}}$ an!

Übung 5.2 Zeigen Sie, dass $(1+4x)^{\frac{1}{2}}$ in $\mathbb{Z}[\![x]\!]$ liegt!

Übung 5.3 Sei $n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Signum von $\binom{n}{k}$ als Funktion von k.

Übung 5.4 Beweisen Sie, dass $\ln(1-x) = -\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $\|x\| < 1$ gilt.

18.05.16

1.6 Die Catalan-Zahlen n-te Einheitswurzeln und Münzen

Wir folgern aus der letzten Formel, dass

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = -\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{2k-1}\binom{2k}{k}$$

Definition: Die Catalan-Zahl C_n ist defniert als die Anzahl der Triangulierungen eines $(n+2)$-Ecks mittels Diagonalen in n Dreiecke. Dabei setzen wir $C_0 := 1$.

Satz: Die Catalan-Zahlen erfüllen die Rekurisionsformel

$$C_n := \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\,.$$

Daraus folgt, dass die zugehörige Potenzreihe $f = \sum_{k\geq 0} C_k x^k$ die Gleichung

$$1 + xf^2 = f$$

erfüllt, was zu $f = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$ und zu $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ führt.

Beobachtung: Die komplexen Zahlen $\left\{\xi_{k,n} = \exp\left(\frac{2\pi k i}{n}\right)\right\}_{k=0,\ldots,n-1}$ sind die Nullstellen der Funktion $y^n - 1$.

Münzproblem 1: Auf wieviel Arten a_n kann man den Betrag von n Cent in 1 und 2 Cent Münzen bezahlen. Wir betrachten die erzeugende Funktion $f = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ und zeigen:

$$f = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\geq 0}\frac{2k+3+(-1)^k}{4}x^k\,.$$

Münzproblem 2: Auf wieviel Arten a_n kann man den Betrag von 100 Cent in 1, und 5 Cent Münzen bezahlen. Wir betrachten die erzeugende Funktion $f = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ und sehen:

$$f = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\,.$$

Wir erhalten für alle durch 10 teilbare Zahlen k die Formel

$$a_k = \frac{2k^2+16k+40}{40} \qquad \text{also: } a_{100} = 541\,.$$

Übung 6.1 Finden Sie für das obige Münzproblem 2 (also 1,2, und 5 Cent Münzen) eine Formel für a_k, die für alle durch 5 teilbaren Zahlen k korrekt ist.
Übung 6.2 Finden Sie für das obige Münzproblem 2 (also 1,2, und 5 Cent Münzen) eine Formel für a_k, die für alle Zahlen k korrekt ist.
Übung 6.3 Es gibt in Deutschland 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 und 200 Cent Münzen. Sei a_k die Anzahl der Möglichkeiten einen Betrag von k Cent mittels dieser Münzen zu bezahlen. Zeigen Sie dass es ein Polynom p gibt, so dass für alle durch 200 teilbaren Zahlen k die Formel $a_k = p(k)$ gilt.
Übung 6.4 Bestimmen sie den Grad d des Polynoms p aus Aufgabe 6.3, sowie den Leitkoeffizienten.

25.05.16

1.7 Exponentiell erzeugende Funktionen — 1

Motivation 1: Proposition ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine Folge, so wird durch $\tilde{a}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$ eine zweite Folge definiert. Diese Transformation ist selbstinvers, oder $\tilde{\tilde{a}}_n = a_n$.
Beweis 1 mit Kombinatorik.
Formales Lösen von Differentialgleichungen. Beispiel
Definition der exponentiell erzeugenden Funktion zur Folge $\{a_n\}$ durch $f = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} x^k$.
Summen, Produkte, Integrale und Differentiale der exponentiell erzeugenden Funktion(en)
Beweis 2 der obigen Aussage: Es gilt für die exponentiell erzeugenden Funktionen, dass $\tilde{f}(x) = \exp(x) f(-x)$. Daraus folgt nun, dass $\tilde{\tilde{f}} = f$.
Definition: Wir definieren nun a_n als die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von n Elementen. Dann gilt:
Proposition: Die Zahlen a_n erfüllen die folgenden Eigenschaften:
(i) $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.
(ii) Die exponentiell erzeugende Funktion f der Folge ist $f(x) = \frac{\exp(-x)}{1-x}$.
(iii) Es gilt $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
(iv) $a_n = n \cdot a_{n-1} + (-1)^n$.
Speziell $a_{32} = 96800425246141091510518408809597121$ und

$$\frac{a_{32}}{32!} = \frac{31225943627787448874360777035353 91}{8488091513990113876361871360000000} \approx 0,36787944117144232159552377016146086755 7681.$$

Übung 7.1 Geben Sie die exponentiell erzeugende Funktion der Folge $a_n = k^n$ an.
Übung 7.2 Geben Sie alle formalen Potenzreihen $f \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ an, die die Differentialgleichung $f'' = -f$ erfüllen.
Übung 7.3 Zeigen Sie, dass für eine komplexe Zahl $a \neq 0$ die Gleichung $y^m := a$ genau m verschiedene komplexe Lösungen $\{y_i\}_{i=1,\ldots,m}$ hat. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_i(x) = \exp(y_i \cdot x)$ die Differentialgleichung $\frac{\partial^n}{\partial x^m} f_i = a \cdot f_i$ erfüllen.
Übung 7.4 Nutzen Sie die beiden vorherigen Aufgaben um die Gleichung

$$\exp(i \cdot x) = \cos(x) + i \sin(x)$$

abzuleiten.

25.05.16

1.8 Exponentiell erzeugende Funktionen — 2

Beispiele exponentiell erzeugende Funktionen zu einigen Folgen:

Name	Beschreibung	explizite Form	exp. erzeugende Fkt
a_n	Wörter der Länge n aus $\{A\}$	$a_n = 1^n$	$f_a(x) = \exp(x)$
b_n	Wörter der Länge n aus $\{B\}$ mit einer geraden Anzahl von Bs	$b_n = \frac{1^n+(-1)^n}{2}$	$f_b(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$
c_n	Wörter der Länge n aus $\{C\}$ mit einer ungeraden Anzahl von Cs	$c_n = \frac{1^n-(-1)^n}{2}$	$f_c(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$

Name	Beschreibung	explizite Form	exp. erzeugende Fkt
d_n	Wörter der Länge n aus $\{A, B, C\}$ mit einer geraden Anzahl von Bs und ungeraden Anzahl von Cs	$d_n = \frac{3^n-(-1)^n}{4}$	$f_d(x) = f_a \cdot f_b \cdot f_c$

Proposition: Ist $L \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{L}\right)$, so gilt

$$e_n := \sum_{k=0}^{L-1} \xi^{n \cdot k} = \begin{cases} L & \text{, wenn } L|n \\ 0 & \text{, wenn } L \not| n \,. \end{cases}$$

Proposition: (Zick-Zack-Permutationen) Sei a_k die Anzahl der Permuationen $\sigma \in S_k$ mit

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots > \sigma(k-2) < \sigma(k-1) > \sigma(k) \,,$$

so gilt die Rekursion

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_k a_{n-1-k} \,.$$

Die exponentiell erzeugende Funktion $f(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} x^k$ erfüllt daher die Funktionalgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = 1 + f^2(x)$$

und daher gilt $f(x) = \tan(x)$.

Übung 8.1 Wir definieren a_k als die Anzahl der Möglichkeiten eine k-elementige Menge in zweielementige disjunkte Teilmengen zu zerlegen. Wir hatten bereits:

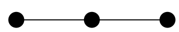
$$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 3$$

Finden Sie die nächsten vier Folgenglieder!
Übung 8.2 Versuchen Sie eine Rekursionsformel zu finden, die a_n durch a_{n-2} ausdrückt. Ansatz: Wählen Sie ein Element. Wieviele Möglichkeiten gibt es zu diesem einen Partner zu wählen? Wieviele Möglichkeiten gibt es den Rest zu gruppieren?
Übung 8.3 Sei $f(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} x^k$ die exponentiell erzeugende Funktion. Finden Sie die Folgen zu $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$ und zu $x \cdot f(x)$. Vergleichen Sie! Finden Sie eine Gleichung für $f(x)$.
Übung 8.4 Es gibt ein Polynom $p(x)$, so dass die Funktion $g(x) = \exp(p(x))$ die Funktionalgleichung auf der vorherigen Aufgabe erfüllt.
Finden Sie $p(x)$!
Geben Sie $f(x)$ an und leiten daraus eine Formel für a_k ab!

2 Algebraische Graphentheorie

08.06.16 **2.1 Definitionen und erste Beispiele**

Definition: Adjazenzmatrizen $A(\Gamma)$ einfacher Graphen, das Spektrum eines Graphen.

Beispiel 1: $\Gamma =$  $, A(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{Spec}(\Gamma) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}.$

Proposition: Ist $\Gamma = K_n$ der vollständige Graph mit n Ecken und $\binom{n}{2}$ Kanten, so gilt $\operatorname{Spec}(\Gamma) = \{-1, -1, \ldots, -1, n-1\}$.

Proposition: Ist Γ ein einfacher Graph mit n Ecken, so gilt für alle $\lambda \in \operatorname{Spec}(\Gamma)$, dass $\lambda \leq n-1$. Ferner impliziert $\lambda = n-1$, dass Γ isomorph zu K_n ist.

Satz: Ist Γ ein einfacher Graph mit Adjazenzmatrix $A = A(\Gamma)$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $B = A^k$, dass

$$b_{i,j} = \#\{\text{ alle Wege der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_j\}\,.$$

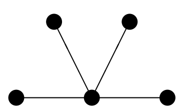
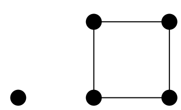
Folgerung 1: Ist Γ ein einfacher Graph mit Adjazenzmatrix $A = A(\Gamma)$, so gilt für $B = A^2$, dass $b_{i,i} = \deg(v_i)$ und somit $\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot \#(E)$.

Folgerung 2: (Dreiecksformel) Ist Γ ein einfacher Graph mit Adjazenzmatrix $A = A(\Gamma)$, so gilt $\frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3) = \#\{C_3 \subset \Gamma\}$.

Folgerung 3: (Vierecksformel) Ist Γ ein einfacher Graph mit Adjazenzmatrix $A = A(\Gamma)$ und den Graden $d_i = \deg(v_i)$, so gilt $\frac{1}{8}\left(\operatorname{tr}(A^4) + \operatorname{tr}(A^2) - 2\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) = \#\{C_4 \subset \Gamma\}$.

Übung 9.1 Sei $\Gamma = K_n$ der vollständige Graph mit n Ecken und $\binom{n}{2}$ Kanten, und $A = A(\Gamma)$ seine Adjazenzmatrix. Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die Potzenz A^k.

Übung 9.2 Berechnen Sie das Spektrum der Graphen

$\Gamma_1 =$  $\Gamma_2 =$ 

Übung 9.3 Kann man am Spektrum eines Graphen erkennen, ob er zusammenhängend ist?

Übung 9.4 Erläutern Sie, wie man aus dem Spektrum eines Graphen Γ die Anzahl der Dreiecke $\{C_3 \subset \Gamma\}$ bestimmen kann. Erläutern Sie ferner, warum sich die Anzahl der Vierecke $\{C_4 \subset \Gamma\}$ nicht aus dem Spektrum ablesen läßt!

15.06.16 **2.2 Der Satz von Perron-Frobenius**

Definition: Für ein $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ definieren wir $A > 0$ und $A \geq 0$ elementweise. Ebenso $v > 0$ nd $v \geq 0$ für $v \in \mathbb{R}^n$.

Definition: A heißt unzerlegbar, wenn es keine echte Zerlegung der Menge $\{1, \ldots n\} = I \cup J$ gibt, so dass $a_{i,j} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \in J$.

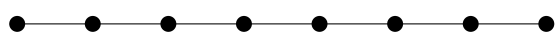
Lemma: Sei Γ ein Graph und $A = A(\Gamma)$ seine Adjazenzmatrix. Dann gilt Γ ist zusammenhängend $\iff$ A ist unzerlegbar.

Lemma: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gegeben mit $A \geq 0$ und A unzerlegbar, so gilt die Ungleichung $(E_n + A)^{n-1} > 0$.
Satz (Perron-Frobenius): Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gegeben mit $A \geq 0$ und A unzerlegbar, so gibt es ein reelles $r > 0$ mit:
(1) r is Eigenwert mit einem positiven Eigenvektor $v > 0$.
(2) Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(r, A)$ ist von der Dimension eins.
(3) Alle anderen Eigenwerte λ erfüllen $\|\lambda\| \leq r$.

Übung 10.1 Die folgenden Mengen (mit Vielfachheiten) sind keine Spektren einfacher zusammenhängender Graphen. Begründen Sie warum nicht!

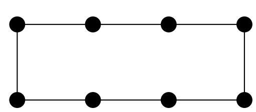
$$\begin{aligned} S_1 &= \{4, 3, 2, -2, -2, -2, -2, -2\} \\ S_2 &= \{4, 4, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1\} \\ S_3 &= \{10, -2, -2, -2, -2, -2\} \\ S_4 &= \{4, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}\} \end{aligned}$$

Übung 10.2 Wir betrachten den folgenden Graphen

$\Gamma =$ 

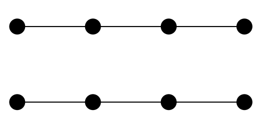
Für welche natürlichen Zahlen k gilt die Ungleichung $(I_8 + A)^k > 0$.
Begründen Sie Ihre Antwort!

Übung 10.3 Wir betrachten den folgenden Graphen

$\Gamma =$ 

Für welche natürlichen Zahlen k gilt die Ungleichung $(I_8 + A)^k > 0$.
Begründen Sie Ihre Antwort!

Übung 10.4 Wir betrachten den folgenden Graphen

$\Gamma =$ 

Für welche natürlichen Zahlen k gilt die Ungleichung $(I_8 + A)^k > 0$.
Begründen Sie Ihre Antwort!

22.06.16 **2.3 Der Satz von Hermite-Biehler**

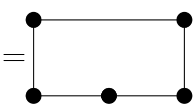
Proposition: Sei Γ ein Graph mit maximalen Abstand $d = d(\Gamma)$ zwischen zwei Ecken. Die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte von $A(\Gamma)$ sei t. Dann gilt: $t - 1 \geq d$.

Definition: Zwei reelle Polynome f und g heißen *verflochten*, wenn sie nur reelle Nullstellen $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ bzw. $\{\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}\}$ haben und die Ungleichung

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

erfüllen. Die Polynome heißen *streng verflochten*, wenn alle $\leq$ in der obigen Ungleichung $<$ sind.
Satz von Hermite-Biehler: f und g sind streng verflochten $\iff$ $F = f + i \cdot g$ hat alle Nullstellen in der oberen oder unteren Halbebene.

Übung 11.1 Sei $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = x - a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Nullstellen von $f + i \cdot g$ in Abhängigkeit von a und entscheiden Sie, wann beide in der selben Halbebene liegen! Wann sind f und g verflochten?
Übung 11.2 Wir betrachten den Graphen C_5

$C_5 =$ 

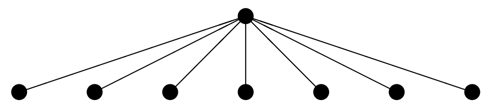
Sei ξ eine Lösung der Gleichung $x^5 - 1 = 0$. Zeige, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $A(C_5)$ ist.

Übung 11.3 Wir betrachten weiterhin den Graphen C_5. Geben Sie eine Basis von Eigenvektoren des $\mathbb{C}^5$ bezüglich $A(C_5)$ an und geben Sie das Spektrum von C_5 an!
Übung 11.4 Was ist das Spektrum von C_n?

29.06.16 **2.4 Das Spektrum von Untergraphen**

Zweiter Teil des Beweises des Satzes von Hermite-Biehler.
Folgerung: Sind f und g reelle Polynome, so sind f und g streng verflochten $\iff$ für alle $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ hat das Polynom $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ nur reelle und einfache Nullstellen.
Verallgemeinerung: Sind f und g reelle Polynome vom Grad n und $n-1$, so sind f und g verflochten $\iff$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Polynom $f + \alpha \cdot g$ nur reelle Nullstellen.
Satz: Ist Γ ein Graph und Γ' der durch Entfernen einer Ecke (samt Kanten zu dieser) entstehenden Graph, so sind die Spektren von Γ und Γ' verflochten.
Beispiel: Spektrum von C_n ist $\left\{2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right\}_{k=0,\ldots,n-1}$.
Beispiel: Spektrum von P_n ist $\left\{2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right\}_{k=1,\ldots,n}$.
Definition: Bipartiter Graph.
Beispiel: P_n ist stets bipartit. C_n ist bipartit $\iff$ n ist gerade.
Satz: Ist Γ bipartit, so ist sein Spektrum 0-symmetrisch.

Letzte Übungsserie Wir betrachten in dieser Übung den Graphen

$\Gamma =$ 

Ihre Aufgabe ist es, das Spektrum und die Eigenräume dieses Graphen anzugeben. Ferner sollen Sie das charakterische sowie das Minimalpolynom der Adjazenzmatrix $A(\Gamma)$ bestimmen.
Dabei könnten Sie die folgenden Hinweise nutzen:
- Ist Γ bipartit?
- Welche Automorphismen hat Γ, was machen diese mit Eigenvektoren?

06.07.16 **2.5 Reguläre Graphen**

Satz: Γ ist bipartit $\iff$ sein Spektrum ist 0-symmetrisch.
Lemma: Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph und gilt für zwei nicht benachbarte Ecken v_i und v_j, dass sie dieselben Nachbarn haben, so gilt für jeden Eigenvektor x zum Eigenwert λ: $\lambda = 0$ oder $x_i = x_j$.
Folgerung: Der maximal bipartite Graph $K_{n,m}$ hat das Spektrum $\sqrt{nm}, -\sqrt{nm}, 0$ mit den Vielfachheiten 1, 1 und $n + m - 2$.
Definition: k-regulärer Graph.
Proposition: Ist Γ ein zusammenhängender k-regulärer Graph, so ist k der maximale Eigenwert. Wenn Γ auch den Eigenwert $-k$ besitzt, so ist Γ bipartit.
Satz vom Freundschaftsgraphen.