Partielle Differentialgleichungen

Frank Müller

16. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Eine *partielle Differentialgleichung (kurz PDG)* ist eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned}&F(x^1, x^2, \dots, x^n, u, u_{x^1}, \dots, u_{x^n}, u_{x^1x^1}, \dots, u_{x^nx^n}, u_{x^1x^1x^1}, \dots) = 0\\ &\text{für alle } x = (x^1, \dots, x^n) \in \Omega.\end{aligned} \tag{0.1}$$

Hierbei ist F eine gegebene Funktion, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ eine offene Teilmenge, $x = (x^1, \dots, x^n)$ die unabhängigen Variablen und $u = u(x^1, \dots, x^n)$ die gesuchte *Lösung* der partiellen Differentialgleichung, deren auftretende partielle Ableitungen $u_{x^1} = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots$ in Ω existieren sollen. Allgemeiner werden wir auch Systeme von $N \in \mathbb{N}$ PDG für eine oder mehrere unbekannte Funktionen $u = (u_1, \dots, u_\nu)$ betrachten, also

$$F_k(x, u_1, \dots, u_\nu, u_{1,x^1}, \dots, u_{\nu,x^n}, \dots) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad k = 1, \dots, N. \tag{0.2}$$

Die höchste auftretende Ableitung in (0.1) heißt die *Ordnung der PDG* (oder des Systems).

Die Funktion F in (0.1) ist zunächst natürlich vollkommen willkürlich. Es ist aber nicht möglich, alle solche PDG mit ein und derselben Methode zu lösen und man sollte nicht annehmen, dass jede PDG (0.1) eine Lösung hat. Daher wird man sich auf solche Klassen von PDG beschränken, die in den Anwendungen auftreten. Wir beginnen mit einigen Beispielen

1.) *Cauchy-Riemann-Gleichungen.* $x := x^1$, $y := x^2$:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \Omega \tag{0.3}$$

für zwei Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Das System (0.3) ist genau dann erfüllt, wenn $f := u + iv \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ in Ω holomorph ist.

2.) *Laplacegleichung.*

$$\Delta u := \sum_{k=1}^{n} u_{x^kx^k} = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{0.4}$$

Dies ist eine der wichtigsten PDG überhaupt! Tritt z.B. bei der Beschreibung von Gleichgewichtszuständen (Temperatur,...) auf. Auch der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion genügen der Laplacegleichung mit $n = 2$; dies folgt sofort aus (0.3).

Die allgemeinere *Poissongleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{0.5}$$

mit vorgegebener Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tritt z.B. bei der Bestimmung eines Gravitations- oder elektrischen Potentials auf.

3.) *Die Wärmeleitungsgleichung.*

$$u_t = \Delta u, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{0.6}$$

Dabei ist die ausgezeichnete Variable $t \in R_+ := (0, +\infty)$ die *Zeitkoordinate* und $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega$ die *Raumkoordinaten*. Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt z.B. die Wärmeentwicklung in einem „Körper“ bei konstanter Dichte und spezifischer Wärme.

4.) *Die Wellengleichung.*

$$u_{tt} = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{0.7}$$

Sie beschreibt allgemein Schwingungsvorgänge und Wellenausbreitung.

5.) *Die Schrödingergleichung.*

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar}{2m}\Delta u + Vu \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+,\ \Omega \subset \mathbb{R}^3. \tag{0.8}$$

($\hbar := \frac{h}{2\pi}$, h... Plancksches Wirkungsquantum). Beschreibt in der Quantenmechanik die Bewegung eines einzelnen Teilchens der Masse m im Feld mit (zeitlich unveränderlichem) Potential $V = V(x)$. Sie ähnelt zwar der Wärmeleitungsgleichung, jedoch führt der komplexe Faktor $i = \sqrt{-1}$ auf ein vollständig anderes Verhalten. Die beschreibende Funktion ($u \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}^4$, $r \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$):

$$F = F(x, u, p, r) := i\hbar p_4 + \frac{\hbar}{2m}(r_{11} + r_{22} + r_{33}) - V(x)u$$

ist in diesem Fall *komplexwertig* und auch die gesuchte Lösung ist komplexwertig. Hierbei fasse man $p \in \mathbb{C}^4$ als *Platzhaltervariable* für $Du := (u_{x^1}, \ldots, u_{x^4})$ und $r \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ als Platzhaltervariable für $D^2u = (u_{x^j x^k})_{j,k=1,\ldots,4}$ auf. Durch zerlegen in Real und Imaginärteil lässt sich (0.8) als System aus zwei reellen PDG 2. Ordnung schreiben.

Wir werden in dieser Vorlesung immer annehmen, dass F *reellwertig* ist.

6.) *Die biharmonische oder Plattengleichung*

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{0.9}$$

spielt in der Kontinuumsmechanik von Platten eine Rolle.

Das System (0.3) ist von erster Ordnung, die PDG (0.4)-(0.8) von zweiter und (0.9) von vierter Ordnung. Alle der obigen Beispiele von PDG sind *linear*, d.h. sie sind linear in der gesuchten Funktion u und deren Ableitungen mit von $x \in \Omega$ abhängigen Koeffizienten. Viele Anwendungen führen aber auch auf nichtlineare PDG und häufig sind lineare PDG Spezialfälle oder Linearisierungen allgemeinerer Modelle:

7.) *Die Minimalflächengleichung.* $x := x^1$, $y := x^2$.

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{0.10}$$

beschreibt Graphen $(x, y, u(x, y)), (x, y) \in \Omega$, verschwindender mittlerer Krümmung. Die Gleichung (0.10) ist offenbar nicht linear. Genauer ist (0.10) *quasilinerar*, d.h. linear in den höchsten auftretenden Ableitungen (hier u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}).

Allgemeiner beschreibt das System

$$\begin{aligned}
&\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u_3 = 0 \quad \text{in } \Omega,\\
&u_{1,x}^2 + u_{2,x}^2 + u_{3,x}^2 = u_{1,y}^2 + u_{2,y}^2 + u_{3,y}^2 > 0 \quad \text{in } \Omega,\\
&u_{1,x}u_{1,y} + u_{2,x}u_{2,y} + u_{3,x}u_{3,y} = 0 \quad \text{in } \Omega
\end{aligned} \tag{0.11}$$

eine (konform parametrisierte) Fläche $(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$ verschwindender mittlerer Krümmung, eine sogenannte *Minimalfläche*.

8.) *Die Monge-Ampère-Gleichung*

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{0.12}$$

mit vorgegebener Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dies ist offenbar eine nichtlineare Gleichung, die auch nicht quasilinear ist. Allgemeiner betrachtet man im n-dimensionalen Fall

$$\det(u_{x^j x^k})_{j,k=1,\ldots,n} = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{0.13}$$

9.) *Die Einsteinschen Feldgleichungen* der allgemeinen Relativitätstheorie

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \tag{0.14}$$

Dabei ist κ =const, $(T_{ij})_{i,j}$ der Energietensor (gegeben) und $i = 0$ entspricht $x^0 := t > 0$. Ferner ist

$$R_{ij} := \sum_{k=0}^{3} \left[\Gamma^k_{ij,x^k} - \Gamma^k_{ik,x^j} + \sum_{l=0}^{3} \left(\Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{lj}\Gamma^l_{ik} \right) \right]$$

die *Ricci-Krümmung* mit

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} g^{kl} \left(g_{jl,x^i} + g_{il,x^j} - g_{ij,x^l} \right), \quad (g^{ij})_{i,j} := (g_{ij})^{-1}_{i,j},$$

und

$$R := \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij} R_{ij}$$

ist die *Skalar-Krümmung*. Das System (0.14) zur Bestimmung der Metrik $(g_{ij})_{i,j}$ ist also von 2. Ordnung und hochgradig nichtlinear.

Wie schon erwähnt, gibt es keine einheitliche Methode zur Behandlung aller Typen von PDG. Wir werden uns in der Vorlesung auf die Behandlung von Gleichungen 2. Ordnung konzentrieren. Die grundsätzlichen Fragen im Zusammenhang mit einer PDG sind dabei: Existiert eine Lösung? Wieviele Lösungen gibt es? Wie verhält sich die Lösung qualitativ?

Wie schon bei gewöhnlichen Differentialgleichungen werden dabei auch bei PDG zusätzliche Rand- und/oder Anfangsbedingungen gestellt. Welche Art von zusätzlicher Bedingung sinnvoll ist und wie das Problem angegangen werden soll hängt dabei wesentlich vom sogenannten *Typ der PDG* ab:

Betrachten wir die Funktion $F(x, u, p, r) = F(x, u, p_1, \ldots, p_n, r_{11}, \ldots, r_{nn})$ mit den Platzhaltervariablen p_i (für u_{x^i}) und r_{ij} (für $u_{x^i x^j}$), $i, j = 1, \ldots, n$, und ist F in den Variablen r_{ij} differenzierbar und die Matrix $(F_{r_{ij}})_{i,j=1,\ldots n}$ symmetrisch, so haben wir die folgende Einteilung:

(a) Die PDG $F = 0$ heißt in $x_0 \in \Omega$ *elliptisch* für $u = u(x)$, falls die Matrix

$$F_{r_{ij}}(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0))$$

positiv definit ist. Gilt dies in allen Punkten $x \in \Omega$, so heißt die PDG *elliptisch in Ω für u.*

(b) Wir nennen die PDG $F = 0$ *parabolisch in x_0 für u*, falls

$$\det \left(F_{r_{ij}}(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \right)_{i,j} = 0$$

gilt und *parabolisch in Ω für u*, falls dies für alle $x \in \Omega$ richtig ist.

(c) Die PDG $F = 0$ heißt schließlich *hyperbolisch in* x_0 *für* u, wenn die Matrix $F_{r_{ij}}(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0))$ genau einen negativen und $n-1$ positive Eigenwerte besitzt. Gilt dies in ganz Ω, so heißt die PDG *hyperbolisch in* Ω *für* u.

Man beachte, dass in (a) und (c) durch Übergang zur Funktion $-F$, die offenbar die gleiche PDG beschreibt, auch negativ definite $F_{r_{ij}}$ (im Fall (a)) bzw. $F_{r_{ij}}$ mit einem positiven und $n-1$ negativen Eigenwerten auf den gleichen Typ führen.

Offenbar hängen die obigen Definitionen von der unbekannten Funktion $u = u(x)$ ab. Die Laplacegleichung (0.4) ist das „Vorzeigemodell“ einer elliptischen PDG, die Wärmeleitungsgleichung (0.6) die parabolische Standardgleichung und die Wellengleichung (0.7) ist die wichtigste hyperbolische Gleichung. Man beachte, dass für lineare Gleichungen der Typ nicht von der gesuchten Funktion abhängt.

Die Minimalflächengleichung (0.10) ist für alle Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ elliptisch in Ω. Hingegen ergibt sich für die Monge-Ampère-Gleichung (0.12)

$$F(x, u, p, r) = \det r - f = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} - f,$$

falls man (0.12) in die äquivalente Form

$$u_{x^1x^1}u_{x^2x^2} - u_{x^1x^2}u_{x^2x^1} - f = 0$$

bringt. Dann folgt

$$(F_{r_{ij}})_{i,j} = \begin{pmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{pmatrix}.$$

Ist u eine Lösung von $F = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} &\det\big(F_{r_{ij}}(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0))\big)_{i,j} \\ &\qquad = u_{x^1x^1}(x_0)u_{x^2x^2}(x_0) - u_{x^1x^2}(x_0)u_{x^2x^1}(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Ist also $f(x_0) > 0$ $(= 0, < 0)$, so ist die Monge-Ampère-Gleichung dort elliptisch (parabolisch, hyperbolisch). Falls f in Ω das Vorzeichen wechselt, so existieren sowohl elliptische als auch hyperbolische Punkte in Ω. Die PDG (0.12) ist dann vom *gemischten Typ.*

Schließlich kann man zeigen, dass die Einsteinschen Feldgleichungen hyperbolisch sind für jede Metrik $(g_{ij})_{i,j}$ mit einem negativen und drei positiven Eigenwerten.

Kapitel 1

Laplace- und Poissongleichung

1 Die Poissonsche Darstellungsformel

In diesem Kapitel bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, immer ein beschränktes Gebiet. Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist die Laplacegleichung

$$\Delta u := \sum_{k=1}^{n} u_{x^k x^k} = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1.1}$$

bzw. allgemeiner die Poissongleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{1.2}$$

mit vorgegebenem $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die wichtigste elliptische PDG.

Definition 1.1: *Eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R} \in C^2(\Omega)$ der Laplacegleichung (1.1) heißt* harmonische Funktion*.*

Beispiele:

1. Jede konstante und jede lineare Funktion ist harmonisch.

2. Für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ sind die bez. x rotationssymmetrischen Funktionen

$$\boldsymbol{n = 2:} \qquad \varphi(y;x) := \frac{1}{2\pi} \log|y-x|, \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\},$$

$$\boldsymbol{n \geq 3:} \qquad \varphi(y;x) := \frac{1}{(2-n)\sigma_n} |y-x|^{2-n}, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\},$$

harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Hierbei und i.F. bezeichnet

$$\sigma_n = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad \text{(Gammafunktion)},$$

den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre; siehe [S] Kap. V, § 1.

Definition 1.2: *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir* Normalgebiet*, wenn die Voraussetzungen des Gaußschen Satzes erfüllt sind. Das heißt, für jedes Vektorfeld $g = g(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\int_\Omega |div\, g(x)| dx < +\infty$ haben wir die Identität*

$$\int\limits_\Omega div\, g(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} g(x) \cdot \nu(x)\, d\sigma(x). \tag{1.3}$$

Dabei bezeichnet $d\sigma(x)$ das Oberflächenelement von $\partial\Omega$ im Randpunkt $x \in \Omega$ und $\nu(x)$ die äußere Normale an Ω in diesem Punkt.

Bemerkung: In [S] Kap. I, § 5 wurde z.B. gezeigt, dass (1.3) gilt, falls:

(i) Der Rand von Ω stückweise C^1 ist, d.h. $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \overline{F_i}$ mit regulären C^1-Hyperflächen F_i mit stetigem Abschluss, die höchstens Randpunkte gemein haben und endlichen Flächeninhalt besitzen.

(ii) Die Menge der „Kanten“ $\bigcup_{i=1}^N \partial F_i$ hat $(n-1)$-dimensionales Hausdorffmaß 0.

(iii) Jeder Punkt von Ω ist von außen erreichbar, d.h. für beliebiges $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Punktfolge $\{x_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, so dass $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$ richtig ist.

Das Integral auf der rechten Seite von (1.3) ist dann als Integral über die reguläre Randpunktmenge $\bigcup_{i=1}^N F_i \subset \partial\Omega$ zu verstehen.

Insbesondere ist jedes C^1-Gebiet Normalgebiet. Dabei heißt ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *C^k-Gebiet*, falls folgendes richtig ist: Zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ gibt es ein $r > 0$ und eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \in C^k(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$, so dass – nach eventueller Umbennung und Umorientierung der Koordinatenachsen – gilt:

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \big\{x \in B_r(x_0) \,:\, x^n > \gamma(x^1, \dots, x^{n-1})\big\}.$$

Definition 1.3: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet. Dann nennen wir die Funktion*

$$\varphi(y;x) := \Gamma(|y-x|) + \psi(y;x), \quad x, y \in \Omega \textit{ mit } x \neq y \tag{1.4}$$

Grundlösung der Laplacegleichung. *Hierbei ist*

$$\Gamma(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r, & \textit{für } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n} r^{2-n}, & \textit{für } n \geq 3 \end{cases}, \quad r > 0, \tag{1.5}$$

und $\psi = \psi(y;x) \in C^0(\Omega \times \Omega)$ ist eine beliebige Funktion, die für jedes $x \in \Omega$ als Funktion $y \mapsto \psi(y;x)$ in Ω harmonisch ist und zur Klasse $C^1(\overline{\Omega})$ gehört.

Satz 1.1: *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Poissongleichung (1.2) mit rechter Seite $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann haben wir für alle $x \in \Omega$ die Darstellung*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} \Big[u(y)\frac{\partial_y \varphi}{\partial\nu}(y;x) - \varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Big] d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Omega} \varphi(y;x) f(y)\, dy. \end{aligned} \tag{1.6}$$

mit der Grundlösung $\varphi = \varphi(y;x)$ aus Definition 1.3 und der Ableitung $\frac{\partial}{\partial\nu} = \nu \cdot \nabla$ in Richtung der äußeren Normalen an $\partial\Omega$.

Beweis: Sei $x \in \Omega$ fest und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, |y-x| < \varepsilon\} \subset\subset \Omega$ gilt. Dann liefert die 2. Greensche Formel angewendet in $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\varphi(y;x)\, dy &= \int_{\Omega_\varepsilon} \big[\Delta u(y)\varphi(y;x) - u(y)\Delta_y\varphi(y;x)\big]\, dy \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Big[\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\varphi(y;x) - u(y)\frac{\partial_y\varphi}{\partial\nu}(y;x)\Big]\, d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big[\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\varphi(y;x) - u(y)\frac{\partial_y\varphi}{\partial\nu}(y;x)\Big]\, d\sigma(y) \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Big[\frac{\partial u}{\partial r}(y)\varphi(y;x) - u(y)\frac{\partial_y\varphi}{\partial r}(y;x)\Big]\, d\sigma(y) \end{aligned} \tag{1.7}$$

mit der Radialableitung $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{y-x}{\varepsilon} \cdot \nabla$. Die linke Seite von (1.7) erfüllt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\varphi(y;x)\, dy = \int_{\Omega} f(y)\varphi(y;x)\, dy, \tag{1.8}$$

da $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x)} |\varphi(y;x)|\, dy \to 0\, (\varepsilon \to 0)$ gilt. Zur Berechnung des zweiten Kurvenintegrals auf der rechten Seite von (1.7) beachten wir

$$\varphi(y;x) = \Gamma(\varepsilon) + \psi(y;x) \quad \text{für } y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

Da ferner $\psi(\cdot;x)$ harmonisch in Ω ist, also insbesondere $|\psi|, |\nabla_y\psi| \le c < +\infty$ gilt auf $\overline{B_\varepsilon(x)}$, folgt

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial r}(y)\varphi(y;x)\, d\sigma(y)\Big| &\le [-\Gamma(\varepsilon) + c] \sup_{\partial B_\varepsilon(x)} |\nabla u| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) \\ &= \varepsilon^{n-1}\sigma_n[-\Gamma(\varepsilon)+c] \sup_{\partial B_\varepsilon(x)} |\nabla u| \;\to\; 0 \;(\varepsilon \to 0), \end{aligned} \tag{1.9}$$

wobei wir noch $\int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) = \varepsilon^{n-1}\sigma_n$ benutzt haben. Außerdem finden wir

$$\begin{aligned}
&\Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial_y \varphi(y;x)}{\partial r}\, d\sigma(y) - u(x) \Big| \\
&\quad \le \Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\Gamma'(\varepsilon)\, d\sigma(y) - u(x) \Big| + \Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, \frac{\partial_y \psi}{\partial r}(y;x)\, d\sigma(y) \Big| \\
&\quad \le \Big| \frac{\varepsilon^{1-n}}{\sigma_n} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, d\sigma(y) - u(x) \frac{\varepsilon^{1-n}}{\sigma_n} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) \Big| + c\varepsilon^{n-1}\sigma_n \sup_{\partial B_\varepsilon(x)} |u| \\
&\quad \le \sup_{y \in \partial B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(x)| + c\sigma_n \varepsilon^{n-1}\sigma_n \sup_{\partial B_\varepsilon(x)} |u| \ \to\ 0\ (\varepsilon \to 0).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Kombinieren wir nun Formeln (1.7)-(1.10), so erhalten wir die behauptete Identität (1.6).

q.e.d.

Als Folgerung aus Satz 1.1 erhalten wir den folgenden Regularitätssatz:

Satz 1.2: *Jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gehört zur Klasse $C^\infty(\Omega)$.*

Beweis: Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig gewählt und $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Nach Voraussetzung ist $u \in C^2(\overline{B_r(x_0)})$ richtig und wir können Satz 1.1 anwenden. Hierzu wählen wir die spezielle Grundlösung $\varphi(y;x) = \Gamma(|y-x|)$, d.h. $\psi(y;x) \equiv 0$ in Definition 1.3, und erhalten

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_r(x_0)} \Big[u(y) \frac{\partial_y}{\partial \nu} \Gamma(|y-x|) - \Gamma(|y-x|) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Big] d\sigma(y), \quad x \in B_r(x_0).$$

Durch Differentiation unter dem Integralzeichen (der Differenzenquotient des Integranden konvergiert gleichmäßig in jedem Kompaktum $K \subset B_r(x_0)$!) folgt

$$u_{x^k}(x) = \int\limits_{\partial B_r(x_0)} \Big[u(y) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial_y}{\partial \nu} \Gamma(|y-x|) - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma(|y-x|) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Big] d\sigma(y)$$

in $B_r(x_0)$ und entsprechend für höhere Ableitungen, da $\Gamma(|y-x|)$ und $\frac{\partial_y}{\partial \nu}\Gamma(|y-x|)$ bez. x beliebig oft differenzierbar sind in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Somit finden wir $u \in C^\infty(B_r(x_0))$ und da $x_0 \in \Omega$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ in Ω reellanalytisch ist, d.h. lokal in eine (reelle) Potenzreihe entwickelbar. Einen Beweis, sogar für Lösungen der Poissongleichung mit reellanalytischer rechter Seite f findet man in [S] Kap. V, § 2.

In Satz 1.1 haben wir noch die Freiheit der Wahl der harmonischen Funktion ψ. Besonders einfach wird (1.6), wenn φ für $y \in \partial\Omega$ verschwindet.

Definition 1.4: *Eine Grundlösung $\varphi_G = \varphi_G(y;x)$ im Normalgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir* Greensche Funktion *für Ω, wenn für beliebige $x \in \Omega$ die folgende Randbedingung gilt:*

$$\varphi_G(y;x) = 0 \quad \textit{für alle } y \in \partial\Omega. \tag{1.11}$$

Wir wollen die Greensche Funktion für die Kugel $B_R := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ bestimmen. Dazu machen wir folgenden Ansatz: Wir schreiben

$$\hat{x} := \frac{R^2}{|x|^2}x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

für den an ∂B_R gespiegelten Punkt und betrachten

$$\varphi_G(y;x) := \begin{cases} \Gamma(|y-x|) - \Gamma\big(\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}|\big), & \text{falls } x \in B_R \setminus \{0\} \\ \Gamma(|y|) - \Gamma(R), & \text{falls } x = 0 \end{cases}, \tag{1.12}$$

bzw. $\varphi_G(y;x) = \Gamma(|y-x|) + \psi_G(y;x)$ mit

$$\psi_G(y;x) := -\begin{cases} \Gamma\big(\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}|\big), & \text{falls } x \in B_R \setminus \{0\} \\ \Gamma(R), & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Wegen $\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}| \to R (x \to 0)$ ist ψ_G offenbar stetig in $B_R \times B_R$ (beachte $\hat{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}$ für $x \in B_R$). Ferner ist ψ_G harmonisch in B_R als Funktion $y \mapsto \psi_G(y;x)$ mit $\psi_G(\cdot;x) \in C^1(\overline{B_R})$ für jedes $x \in B_R$. Somit ist φ_G Grundlösung in B_R.

Für $y \in \partial B_R$ haben wir ferner die Identität

$$\begin{aligned} \Big(\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}|\Big)^2 &= \frac{|x|^2}{R^2}\Big|y - \frac{R^2}{|x|^2}x\Big|^2 = \frac{|x|^2}{R^2}\Big[|y|^2 + \frac{R^4}{|x|^4}|x|^2 - 2\frac{R^2}{|x|^2}x \cdot y\Big] \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y = |y-x|^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}| = |y-x| \quad \text{für } y \in \partial B_R,\ x \in B_R. \tag{1.13}$$

Formel (1.12) entnehmen wir also $\varphi_G(y;x) = 0$ für $y \in \partial B_R$ und $x \in B_R$.

Setzen wir nun die Greensche Funktion (1.12) für die Kugel in Satz 1.1 ein, so erhalten wir den

Satz 1.3: (Poissonsche Darstellungsformel)
Sei $u = u(x) \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ *eine Lösung der Poissongleichung*

$$\Delta u = f \quad \textit{in } B_R$$

mit rechter Seite $f = f(x) \in C^0(\overline{B_R})$. *Dann gilt für alle* $x \in B_R$ *die Integraldarstellung*

$$u(x) = \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} u(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{|y|<R} \varphi_G(y;x) f(y)\, dy. \tag{1.14}$$

Beweis: Wir können $u \in C^2(\overline{B_R})$ annehmen. Anderenfalls betrachten wir zunächst u in B_ϱ mit $\varrho < R$ und zeigen dort (1.14). Da die rechte Seite stetig von R abhängt, folgt die Behauptung mit $\varrho \to R$.

Für $u \in C^2(\overline{B_R})$ liefert nun Satz 1.1 die Darstellung

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_R} u(y) \frac{\partial_y \varphi_G}{\partial \nu}(y;x)\, d\sigma(y) + \int\limits_{B_R} \varphi_G(y;x) f(y)\, dy. \tag{1.15}$$

Wir berechnen für $x \in B_R \setminus \{0\}$ und $y \in \partial B_R$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_G}{\partial y^k}(y;x) \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial y^k}\Big[\Gamma(|y-x|) - \Gamma\Big(\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}|\Big)\Big] \\
&\overset{\Gamma'(r)=\frac{r^{1-n}}{\sigma_n}}{=} \quad \frac{1}{\sigma_n}|y-x|^{1-n}\frac{y^k - x^k}{|y-x|} - \frac{1}{\sigma_n}\Big(\frac{|x|}{R}|y-\hat{x}|\Big)^{1-n}\frac{|x|}{R}\frac{y^k-\hat{x}^k}{|y-\hat{x}|} \\
&\overset{(1.13)}{=} \quad \frac{1}{\sigma_n}\frac{1}{|y-x|^n}\Big[(y^k - x^k) - \frac{|x|^2}{R^2}(y^k - \hat{x}^k)\Big] \\
&\overset{\hat{x}^k = \frac{R^2}{|x|^2}x^k}{=} \quad \frac{1}{\sigma_n}\frac{y^k}{|y-x|^n}\Big(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\Big)
\end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\partial_y \varphi_G}{\partial \nu} = \nabla_y \varphi(y;x) \cdot \frac{y}{R} = \frac{1}{R\sigma_n}\frac{|y|^2}{|y-x|^n}\Big(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\Big) = \frac{1}{R\sigma_n}\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n}. \tag{1.16}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass (1.16) auch für $x = 0$ erfüllt ist. Einsetzen in (1.15) liefert (1.14).

q.e.d.

Wir beschließen den Paragraphen mit einer Art Umkehrung von Satz 1.3 für den Fall $f \equiv 0$. Dazu betrachten wir das sogenannte *Dirichletsche Randwertproblem für* *den Laplaceoperator* oder kurz *Dirichletproblem* in der Kugel B_R: Gesucht ist eine Lösung von

$$\begin{aligned} &u = u(x) \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R}), \\ &\Delta u(x) = 0 \quad \text{in } B_R, \\ &u(x) = h(x) \quad \text{auf } \partial B_R \end{aligned} \tag{1.17}$$

mit einer vorgegebenen Funktion $h = h(x) \in C^0(\partial B_R)$. Gemäß Satz 1.3 lässt sich jede Lösung von (1.17) in B_R durch das sogenannte *Poissonsche Integral*

$$u(x) := \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} h(y)\, d\sigma(y), \quad x \in B_R, \tag{1.18}$$

darstellen. Es gilt nun auch der

Satz 1.4: *Das Poissonsche Integral (1.18) ist harmonisch in B_R und wir können u stetig auf $\overline{B_R}$ fortsetzen mit der Eigenschaft*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_R}} u(x) = h(x_0) \quad \textit{für alle } x_0 \in \partial B_R. \tag{1.19}$$

Das heißt, u löst das Dirichletproblem (1.17).

Beweis:

1. Durch Vertauschen von Integration und Differentiation in (1.18) erkennt man sofort $u \in C^2(B_R)$. Da die Greensche Funktion φ_G aus (1.2) symmetrisch ist, d.h. es gilt
$$\varphi_G(y;x) = \varphi_G(x;y) \quad \text{für } x, y \in B_R \text{ mit } x \neq y,$$
ist $\varphi_G(y;x)$ auch harmonisch bez. $x \in B_R$. Formel (1.16) oben liefert somit
$$\frac{1}{R\sigma_n} \Delta_x \Big(\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \Big) = \Delta_x \Big(\frac{\partial_y \varphi_G}{\partial \nu}(y;x) \Big) = \frac{\partial_y}{\partial \nu} \big(\Delta_x \varphi_G(y;x) \big) = 0$$
für $x \in B_R$, $y \in \partial B_R$. Damit ergibt sich aus (1.18) sofort
$$\Delta u(x) = \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \Delta_x \Big(\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \Big) h(y)\, d\sigma(y) = 0 \quad \text{in } B_R.$$

2. Wir zeigen nun die stetige Annahme der Randwerte. Setzen wir in der Poissonschen Darstellungsformel (1.14) die harmonische Funktion $u \equiv 1$ ein, so folgt
$$\frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n}\, d\sigma(y) = 1. \tag{1.20}$$

Sei nun $x_0 \in \partial B_R$ gewählt. Da h stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$|h(y) - h(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in \partial B_R : |y - x_0| \le 2\delta.$$

Sind andererseits $x \in B_R$ mit $|x - x_0| \le \delta$ und $y \in \partial B_R$ mit $|y - x_0| \ge 2\delta$, so gilt die Ungleichung

$$|y - x| \ge |y - x_0| - |x_0 - x| \ge \delta.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gewählt. Setzen wir noch

$$\eta := \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon\delta^n}{8MR^{n-1}}\right\} \quad \text{mit } M := \sup_{\partial B_R} |h|,$$

so können wir für alle $x \in B_R$ mit $|x - x_0| \le \eta$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|u(x) - h(x_0)| &\overset{(1.20)}{=} \left| \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \big[h(y) - h(x_0)\big]\, d\sigma(y) \right| \\
&\le \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{\substack{|y-x_0|\le 2\delta \\ y\in\partial B_R}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \big|h(y) - h(x_0)\big|\, d\sigma(y) \\
&\quad + \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{\substack{|y-x_0|> 2\delta \\ y\in\partial B_R}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \big|h(y) - h(x_0)\big|\, d\sigma(y) \\
&\overset{(1.20)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2 - |x|^2}{R\sigma_n\delta^n} 2MR^{n-1}\sigma_n \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4MR^{n-1}}{\delta^n}(R - |x|) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4MR^{n-1}}{\delta^n}|x - x_0| \;\le\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das ist die behauptete Stetigkeitseigenschaft. Q.e.d.

Bemerkung: Durch eine einfache Translation sieht man, dass

$$u(x) := \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} \frac{|y-a|^2 - |x-a|^2}{|y-x|^n} h(y)\, d\sigma(y), \quad x \in B_R(a), \tag{1.21}$$

gemäß

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B_R(a)}} u(x) = h(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \partial B_R(a)$$

stetig auf $\overline{B_R(a)}$ fortsetzbar ist und somit das Dirichletproblem (1.17) in der Kugel $B_R(a)$ löst.

2 Sub- und superharmonische Funktionen; das Maximumprinzip

Aus der Poissonschen Integralformel lesen wir zunächst leicht ab:

Satz 2.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u = u(x) \in C^2(\Omega)$ Lösung der Poissongleichung $\Delta u = f$ in Ω mit einem $f = f(x) \in C^0(\Omega)$. Dann haben wir für alle Kugeln $B_R(a) \subset\subset \Omega$ die Identität*

$$u(a) = \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y-a|<R} \log\Big(\frac{R}{|y-a|}\Big) f(y)\, dy \tag{2.1}$$

falls $n = 2$ bzw.

$$u(a) = \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y) - \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int\limits_{|y-a|<R} \Big(|y-a|^{2-n} - R^{2-n}\Big) f(y)\, dy, \tag{2.2}$$

falls $n \geq 3$ richtig ist.

Beweis: Wir wenden die Poissonsche Darstellungsformel, Satz 1.3, auf $\tilde{u}(x) := u(x + a)$, $x \in B_R = B_R(0)$ an: In B_R ist dann $\Delta\tilde{u} = \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) := f(x+a)$, so dass folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) &= \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \frac{|y|^2}{|y|^n} \tilde{u}(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{|y|<R} \varphi_G(y;0)\tilde{f}(y)\, dy \\ &= \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y|=R} \tilde{u}(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{|y|<R} \varphi_G(y;0)\tilde{f}(y)\, dy \end{aligned}$$

mit

$$\varphi_G(y;0) = \Gamma(|y|) - \Gamma(R) \overset{(1.5)}{=} \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\log|y| - \log R), & \text{falls } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n}\big(|y|^{2-n} - R^{2-n}\big), & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}.$$

Die Rücktransformation $y \mapsto y - a$ im Integral liefert dann die Behauptung.

q.e.d.

Folgerung 2.1: *Eine in Ω harmonische Funktion $u = u(x)$ besitzt die* Mittelwerteigenschaft*:*

$$u(a) = \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y), \quad \textit{falls } B_R(a) \subset\subset \Omega. \tag{2.3}$$

Wir werden gleich zeigen, dass auch die Umkehrung gilt. Die Identität (2.3) kann also als eine Art „schwache Charakterisierung“ harmonischer Funktionen aufgefasst werden. Dies führt auf die folgende

Definition 2.1: *Eine auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetige Funktion $u = u(x) \in C^0(\Omega)$ heißt* schwachharmonisch (subharmonisch,superharmonisch) *in Ω, falls gilt*

$$u(a) = (\leq, \geq) \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y)$$

für beliebige Kugeln $B_R(a) \subset\subset \Omega$.

Bemerkung: Offenbar ist u genau dann subharmonisch, wenn $-u$ superharmonisch ist. Weiter ist eine Funktion genau dann schwachharmonisch, wenn sie sowohl sub- als auch superharmonisch ist. Schließlich ist mit $\alpha, \beta \geq 0$ und subharmonischen u, v auch $\alpha u + \beta v$ subharmonisch; entsprechendes gilt für superharmonische Funktionen.

Satz 2.2: *Eine auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegebene Funktion $u = u(x) \in C^2(\Omega)$ ist in Ω genau dann schwachharmonisch (subharmonisch, superharmonisch), wenn gilt*

$$\Delta u(x) = 0 \ (\geq 0, \leq 0) \quad \textit{für alle } x \in \Omega.$$

Beweis: Zu $u \in C^2(\Omega)$ setzen wir $f := \Delta u \in C^0(\Omega)$. Dann gelten die Darstellungen (2.1) bzw. (2.2) aus Satz 2.1. Da nun aber die Funktion

$$\chi_{a,R}(y) := \begin{cases} \log(\frac{R}{|y-a|}), & \text{falls } n = 2 \\ |y-a|^{2-n} - R^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}$$

nichtnegativ ist in der Kugel $B_R(a) \subset\subset \Omega$, folgt:

$$u(a) \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y) \quad \Longleftrightarrow \quad f = \Delta u \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} 0.$$

Das ist die Behauptung. q.e.d.

Satz 2.3: (Maximum- und Minimumprinzip)
Eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ subharmonische (superharmonische) Funktion $u \in C^0(\Omega)$ nehme in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ ihr globales, endliches Maximum (Minimum) an. Dann folgt $u \equiv const$ in Ω.

Bemerkung: Nach dem oben Gesagten gelten für (schwach-)harmonische Funktionen also sowohl das Maximum- als auch das Minimumprinzip.

Beweis von Satz 2.3: Es genügt die Aussage für subharmonische Funktionen zu zeigen. Sei dazu $M := u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$. Angenommen es gibt ein $x_1 \in \Omega$ mit $u(x_1) < M$. Dann existiert ein stetiger Weg $s[x_0, x_1] \subset \Omega$ mit Parametrisierung $s = s(t)$, $t \in [0,1]$, so dass $s(0) = x_0$ und $s(1) = x_1$. Offenbar ist die Menge

$$T := \{t \in [0,1] \, : \, u(s(t)) = M\}$$

eine abgeschlossene Menge mit $0 \in T$ und $1 \notin T$. Also existiert ein maximales $t^* \in [0,1)$ mit $t \in T$ bzw. $u(s(t)) = M$ für alle $t \leq t^*$. Insbesondere gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $u(s(t)) < M$ für alle $t \in (t^*, t^* + \varepsilon)$. Ist nun $R > 0$ so klein, dass $B_R(s(t^*)) \subset\subset \Omega$ gilt. Dann folgt

$$0 = u(s(t^*)) - M \leq \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-s(t^*)|=R} \big[u(y) - M\big] \, d\sigma(y) \leq 0$$

bzw. $u(y) = M$ auf $\partial B_R(s(t^*))$ und damit insbesondere auch $u(s(\hat{t})) = M$ in einem Punkt $s(\hat{t})$ mit $\hat{t} > t^*$. Da nun für $R \to 0+$ auch $\hat{t} \to t^*$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl von t^* für hinreichend kleines $R > 0$.

Also war die Annahme $u(x_1) < M$ für ein $x_1 \in \Omega$ falsch. Es folgt $u \equiv M$ in Ω.

q.e.d.

Folgerung 2.2: *Eine im beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ subharmonische (superharmonische) Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ nimmt ihr Maximum (Minimum) in einem Randpunkt an, d.h.*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \Big(u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u\Big) \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Für nichtkonstante subharmonische (superharmonische) Funktionen gilt die schärfere Aussage

$$u(x) < \max_{\partial\Omega} u \quad \Big(u(x) > \min_{\partial\Omega} u\Big) \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Beweis (nur für subharmonische Funktionen): Es sei $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ und $x_0 \in \overline{\Omega}$ ein Maximalpunkt mit $u(x_0) = M$. Gilt $x_0 \in \partial\Omega$, so ist (2.4) automatisch richtig. Falls hingegen $x_0 \in \Omega$ richtig ist, so liefert Satz 2.3 $u \equiv$const und (2.4) ist trivial erfüllt.

Ist schließlich $u \not\equiv$const und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M$, so liefert Satz 2.3 einen Widerspruch, d.h. (2.5) folgt.

q.e.d.

Wir nutzen nun das Maximumprinzip, um wie versprochen zu zeigen, dass jede schwachharmonische Funktion harmonisch ist:

Satz 2.4: (Regularitätssatz)
Sei $u \in C^0(\Omega)$ im Gebiet Ω schwachharmonisch. Dann folgt $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ in Ω, d.h. u ist harmonisch.

Beweis: Zu beliebigem $a \in \Omega$ und $R > 0$ mit $B_R(a) \subset\subset \Omega$ lösen wir das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} & v = v(x) \in C^2(B_R(a)) \cap C^0(\overline{B_R(a)}), \\ & \Delta v(x) = 0 \quad \text{in } B_R(a), \\ & v(x) = u(x) \quad \text{auf } \partial B_R(a); \end{aligned} \tag{2.6}$$

vergleiche Satz 1.4 und die nachfolgende Bemerkung. Nun ist die Funktion $u - v \in C^0(\overline{B_R(a)})$ in $B_R(a)$ schwachharmonisch und es gilt $u - v = 0$ auf $\partial B_R(a)$. Folgerung 2.2 liefert also $u - v \equiv 0$ bzw. $u \equiv v$ in $B_R(a)$. Insbesondere ist also u in $B_R(a)$ harmonisch und nach Satz 1.2 gilt $u \in C^\infty(B_R(a))$. Da die Kugel $B_R(a) \subset\subset \Omega$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Wir wenden uns wieder den subharmonischen Funktionen zu und leiten eine interessante Charakterisierung her:

Satz 2.5: *Eine Funktion $u = u(x) \in C^0(\Omega)$ ist in Ω genau dann subharmonisch, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} & \textit{Für jede Kugel } B_R(a) \subset\subset \Omega \textit{ und jede in } B_R(a) \\ & \textit{harmonische Funktion } v \in C^0(\overline{B_R(a)}) \textit{ gilt:} \\ & u \le v \textit{ auf } \partial B_R(a) \quad \Longrightarrow \quad u \le v \textit{ in } \overline{B_R(a)}. \end{aligned} \tag{E}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei u subharmonisch und $v \in C^0(\overline{B_R(a)})$ harmonisch mit $u \le v$ auf $\partial B_R(a)$. Dann ist auch $u - v \in C^0(\overline{B_R(a)})$ subharmonisch mit $u - v \le 0$ auf $\partial B_R(a)$. Folgerung 2.2 liefert also $u \le v \in \overline{B_R(a)}$.

„$\Leftarrow$“ Sei $u \in C^0(\Omega)$ eine Funktion mit der Eigenschaft (E). Mit Hilfe von Satz 1.4 lösen wir dann das Dirichletproblem (2.6). Nach Voraussetzung (E) ist dann $u \le v$ in $\overline{B_R(a)}$. Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen liefert somit

$$u(a) \le v(a) = \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} v(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y),$$

d.h. u ist subharmonisch in Ω.

q.e.d.

Folgerung 2.3: *Mit subharmonischen Funktionen $u_1, \ldots, u_m \in C^0(\Omega)$ ist auch $u := \max(u_1, \ldots, u_m)$ in Ω subharmonisch.*

Beweis: Sei $B_R(a) \subset\subset \Omega$, $v \in C^0(\overline{B_R(a)})$ harmonisch in $B_R(a)$ mit $u \le v$ auf $\partial B_R(a)$. Da $u = \max(u_1, \ldots, u_m)$, folgt auch $u_k \le v$, $k = 1, \ldots, m$, auf $\partial B_R(a)$. Da die u_k subharmonisch sind, liefert Satz 2.5 $u_k \le v$ in $\overline{B_R(a)}$ und folglich auch $u = \max(u_1, \ldots, u_m) \le v$ in $\overline{B_R(a)}$. Wiederum nach Satz 2.5 ist also u subharmonisch.

q.e.d.

Aus den obigen Sätzen können wir einige Aussagen über die Greensche Funktion eines Normalgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ableiten:

Satz 2.6: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet im Sinne von Definition 1.2. Dann ist die Greensche Funktion $\varphi_G = \varphi_G(y;x)$ von Ω, falls existent, eindeutig bestimmt, und für jedes $x \in \Omega$ gilt*

$$\varphi_G(y;x) < 0 \quad \textit{für alle } y \in \Omega \setminus \{x\}.$$

Bemerkung: In Abschnitt 1.4 werden wir Bedingungen an Ω angeben, unter denen wir die Existenz einer Greenschen Funktion beweisen können.

Beweis:

1. Angenommen, es gibt zwei Greensche Funktionen
$$\varphi_G^k(y;x) = \Gamma(|y-x|) + \psi^k(y;x), \quad k = 1, 2.$$
Für festes $x \in \Omega$ ist dann
$$u(y) := \varphi_G^1(y;x) - \varphi_G^2(y;x) = \psi^1(y;x) - \psi^2(y;x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$
in Ω harmonisch und es gilt $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Folgerung 2.2 liefert also $u \equiv 0$ bzw. $\varphi_G^1 \equiv \varphi_G^2$ in $\Omega \setminus \{y\} \times \{x\}$. Da $x \in \Omega$ beliebig war, ist also φ_G eindeutig bestimmt.

2. Zu festem $x \in \Omega$ betrachten wir $\Omega_\varepsilon := \{y \in \Omega : \ |y-x| > \varepsilon\}$ mit hinreichend kleinem $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega, x)$. Da in $\varphi_G(y;x) = \Gamma(|y-x|) + \psi(y;x)$ die Abbildung $y \mapsto \psi(y;x)$ in $C^0(\overline{\Omega})$ liegt, haben wir
$$M := \max_{y \in \overline{\Omega}} \psi(y;x) < +\infty.$$
Wählen wir nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass
$$\Gamma(|y-x|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon, & \text{falls } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \varepsilon^{2-n}, & \text{falls } n \ge 3 \end{cases} < -M \quad \text{für } y \in \partial B_\varepsilon(x)$$
richtig ist, so finden wir
$$\begin{aligned} \Delta_y \varphi_G(y;x) &= 0, \quad y \in \Omega_\varepsilon, \\ \varphi_G(y;x) &\le 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$
Da nun φ_G nicht konstant ist in Ω_ε (beachte $\varphi_G < 0$ auf ∂B_ε), erhalten wir $\varphi_G(y;x) < 0$ in Ω_ε aus Folgerung 2.2. Wegen $\Gamma(\varepsilon) \downarrow -\infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$, liefert Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung.

q.e.d.

Wir schließen mit einer Aussage über isolierte Singularitäten harmonischer Funktionen:

Satz 2.7: (Hebbarkeitssatz)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebeit und $a \in \Omega$. Ferner sei $u \in C^2(\Omega \setminus \{a\})$ harmonisch und beschränkt auf $\Omega \setminus \{a\}$. Dann können wir u harmonisch auf Ω fortsetzen.

Beweis: O.B.d.A. sei $a = 0 \in \Omega$. Zu $R > 0$ mit $B_R \subset\subset \Omega$ sei $v \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B}_R)$ die in Satz 1.4 gegebene Lösung des Dirichletproblems (2.6). Dann gilt also

$$v(y) = u(y) \quad \text{für } y \in \partial B_R$$

und da beide Funktionen beschränkt sind, finden wir

$$M := \sup_{y \in B_R \setminus \{0\}} |u(y) - v(y)| < +\infty.$$

Wir betrachten nun die Greensche Funktion für B_R im Punkt $x = 0$, also

$$\varphi_G(y; 0) = \Gamma(|y|) - \Gamma(R), \quad y \in \overline{B_R},$$

mit

$$\Gamma(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r, & \text{falls } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n} r^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}.$$

Wegen $\Gamma(r) \downarrow -\infty \, (r \downarrow 0)$, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) \in (0, R)$, so dass

$$\varphi_G(y; 0) \leq -\frac{M}{\varepsilon} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \, : \, |y| = \delta(\varepsilon)$$

richtig ist. Also folgt

$$\varepsilon \varphi_G(y; 0) \leq u(y) - v(y) \leq -\varepsilon \varphi_G(y; 0) \quad \text{für alle } y \in \partial K_\varepsilon,$$

wobei wir $K_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^n \, : \, \delta(\varepsilon) < |y| < R\}$ gesetzt haben. Da nun u, v, φ_G in K_ε harmonisch sind, liefert das Maximumprinzip

$$|u(y) - v(y)| \leq -\varepsilon \varphi_G(y; 0), \quad y \in K_\varepsilon. \tag{2.7}$$

Sei nun $r \in (0, R)$ beliebig gewählt. Dann folgt $\{y \in \mathbb{R}^n \, : \, r < |y| < R\} \subset K_\varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, da mit ε auch $\delta(\varepsilon)$ gegen 0 geht. Formel (2.7) und Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ liefern dann $u(y) \equiv v(y)$ für $r < |y| < R$. Da aber $r \in (0, R)$ beliebig war, folgt also $u \equiv v$ in $B_R \setminus \{0\}$, und die Setzung $u(0) := v(0)$ liefert die gesuchte harmonische Fortsetzung.

q.e.d.

3 Die Harnacksche Ungleichung

Satz 3.1: (Harnacksche Ungleichung)
Auf der Kugel $B_R(a) \subset \mathbb{R}^n$ sei $u \in C^2(B_R(a))$ eine harmonische, nichtnegative Funktion. Dann gilt

$$\frac{1 - \frac{|x-a|}{R}}{\left(1 + \frac{|x-a|}{R}\right)^{n-1}} u(a) \le u(x) \le \frac{1 + \frac{|x-a|}{R}}{\left(1 - \frac{|x-a|}{R}\right)^{n-1}} u(a) \quad \text{für alle } x \in B_R(a). \tag{3.1}$$

Beweis: Die Funktion $v(x) := u(x+a) \in C^2(B_R)$ ist in $B_R = B_R(0)$ harmonisch und nichtnegativ. Für $0 < r < R$ gilt $v \in C^2(\overline{B_r})$ und die Poissonsche Darstellungsformel, Satz 1.2, liefert

$$v(x) = \frac{1}{r\sigma_n} \int\limits_{|y|=r} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} v(y)\, d\sigma(y), \quad x \in B_r. \tag{3.2}$$

Beachten wir noch die Abschätzung

$$\frac{r - |x|}{(r+|x|)^{n-1}} = \frac{r^2 - |x|^2}{(r+|x|)^n} \le \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \le \frac{r^2 - |x|^2}{(r-|x|)^n} = \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}$$

für $x \in B_r$ und $y \in \partial B_r$, so entnehmen wir (3.2) wegen $v \ge 0$:

$$\frac{1}{r\sigma_n} \frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}} \int\limits_{|y|=r} v(y)\, d\sigma(y) \le v(x) \le \frac{1}{r\sigma_n} \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}} \int\limits_{|y|=r} v(y)\, d\sigma(y)$$

für alle $x \in B_r$. Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen liefert also

$$\frac{1 - \frac{|x|}{r}}{\left(1 + \frac{|x|}{r}\right)^{n-1}} v(0) \le \frac{r^{n-2}(r-|x|)}{(r+|x|)^{n-1}} v(0) \le v(x) \le \frac{r^{n-2}(r+|x|)}{(r-|x|)^{n-1}} v(0) \le \frac{1 + \frac{|x|}{r}}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{n-1}} v(0)$$

für alle $x \in B_r$. Mit $r \to R$ folgt dann (3.1) für $u(x) = v(x-a)$, $x \in B_R(a)$.
q.e.d.

Folgerung 3.1: *Es sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und nichtnegativ in der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem beschränkten Teilgebiet $\Theta \subset\subset \Omega$ eine Konstante $c = c(n, \Omega, \Theta) > 0$ (unabhängig von u!), so dass gilt*

$$\sup_\Theta u \le c \inf_\Theta u. \tag{3.3}$$

Beweis:

1. Seien $a \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_{2r}(a) \subset \Omega$ gewählt. Für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in B_r(a)$ liefert dann die Harnacksche Ungleichung (3.1) mit $R = 2r$:
$$u(x_1) \le \frac{1+\frac{r}{2r}}{(1-\frac{r}{2r})^{n-1}} u(a) \le \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} \frac{(1+\frac{r}{2r})^{n-1}}{1-\frac{r}{2r}} u(x_2) = 3^n u(x_2). \qquad (3.4)$$

2. Es sei nun ein beschränktes Teilgebiet $\Theta \subset\subset \Omega$ gewählt und es gelte
$$u(x_0) = \inf_{\Theta} u, \quad u(x_1) = \sup_{\Theta} u$$
für zwei Punkte $x_0, x_1 \in \overline{\Theta}$. Dann gibt es einen Weg $s = s_{[x_0,x_1]}$, der x_0 mit x_1 in $\overline{\Theta}$ verbindet. Wir überdecken die kompakte Menge $s_{[x_0,x_1]}$ mit endlich vielen Kugeln $B_r(y_1), \dots, B_r(y_N)$, wobei $N = N(\Omega, \Theta) \in \mathbb{N}$ ist, so dass folgendes gilt:
   (i) $B_{2r}(y_k) \subset \Omega$ für alle $k = 1, \dots, N$,
   (ii) $x_1 \in B_r(y_1)$, $x_0 \in B_r(y_N)$,
   (iii) es gibt Punkte $x_k \in B_r(y_{k-1}) \cap B_r(y_k) \neq \emptyset$ für $k = 2, \dots, N$.

   Wir wenden nun (3.4) nacheinander auf $B_{2r}(y_1), \dots, B_{2r}(y_N)$ an und erhalten
$$\sup_{\Theta} u = u(x_1) \le 3^n u(x_2) \le \ldots \le 3^{(N-1)n} u(x_N) \le 3^{Nn} u(x_0) = 3^{Nn} \inf_{\Theta} u,$$
also (3.3) mit $c = c(n, \Omega, \Theta) := 3^{N(\Omega,\Theta)n} > 0$. q.e.d.

Bemerkung: Ungleichungen der Form (3.3), auch für Lösungen anderer PDGs und sogenannte *schwache Lösungen*, werden Ungleichungen vom Harnacktyp genannt und spielen eine große Rolle in der Theorie.

Eine wichtige Folgerung der Harnackschen Ungleichung ist der folgende Konvergenzsatz, den wir im nächsten Paragraphen anwenden werden:

Satz 3.2: (Harnackscher Konvergenzsatz)
Sei $\{u_k\}_{k=1,2,\dots} \subset C^2(\Omega)$ eine schwach monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf dem Gebiet Ω, d.h. $u_1(x) \le u_2(x) \le u_3(x) \le \ldots$ für alle $x \in \Omega$. Existiert ein $y \in \Omega$, so dass die Folge $\{u_k(y)\}_{k=1,2,\dots}$ nach oben beschränkt ist, dann konvergiert die Funktionenfolge $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ in jedem beschränkten Teilgebiet $\Theta \subset\subset \Omega$ gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u = u(x) \in C^2(\Theta)$.

Bemerkung: Aufgrund der Monotonie ist die Forderung der Beschränktheit gleichbedeutend mit der Konvergenz. Obiger Satz besagt also: Falls eine schwach monotone Folge harmonischer Funktionen in einem Punkt konvergiert, so konvergiert sie überall (in einem Kompaktum) und die Grenzfunktion ist harmonisch.

Beweis von Satz 3.2: Sei $\Theta \subset\subset \Omega$ gewählt und o.B.d.A. sei $y \in \Theta$. (Anderenfalls können wir $\tilde{\Theta}$ mit $\Theta \subset \tilde{\Theta} \subset\subset \Omega$ mit $y \in \tilde{\Theta}$ konstruieren.) Zu $k < l$ wenden wir Folgerung 3.1 auf die Funktion $u_l - u_k \geq 0$ in Ω an und erhalten

$$0 \leq \sup_{\Theta}(u_l - u_k) \leq c \inf_{\Theta}(u_l - u_k) \leq c\big[u_l(y) - u_k(y)\big].$$

Da $\lim_{k\to\infty} u_k(y)$ existiert, finden wir also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$\sup_{\Theta} |u_l - u_k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } l, k \geq N(\varepsilon),$$

d.h. $\{u_k\}_k$ konvergiert gleichmäßig in Θ. Die Grenzfunktion $u(x) := \lim_{k\to\infty} u_k(x)$, $x \in \Theta$, ist somit stetig in Θ.

Ist nun $B_R(a) \subset\subset \Theta$, so liefert die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

$$\begin{aligned} u(a) &= \lim_{k\to\infty} u_k(a) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u_k(y)\, d\sigma(y) \\ &\overset{\text{glm. Konv.}}{=} \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y)\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Also ist u schwachharmonisch und nach Satz 2.4 auch harmonisch in Θ.

q.e.d.

Wir schließen mit einer weiteren berühmten Folgerung der Harnackschen Ungleichung:

Satz 3.3: (Liouville)
Die Funktion $u = u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei im $\mathbb{R}^n$ harmonisch und nach oben beschränkt. Dann ist u konstant.

Beweis: Es existiert ein $M > 0$ mit $u(x) \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Auf die nichtnegative harmonische Funktion $v := M - u$ wenden wir nun die Harnacksche Ungleichung (3.1) an: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ wählen wir $R > 0$ mit $x \in B_R = B_R(0)$ und erhalten

$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} v(0) \leq v(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} v(0)$$

Der Grenzübergang $R \to \infty$ liefert also $v(x) = v(0)$ bzw. $u(x) = u(0)$. Da $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt war, folgt $u \equiv \text{const}$.

q.e.d.

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt natürlich für nach unten beschränkte, harmonische Funktionen. Allerdings kann die Forderung der einseitigen Beschränktheit nicht ersatzlos gestrichen werden, wie das Beispiel der affinen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zeigt.

4 Das Dirichletproblem für die Laplacegleichung

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Frage, für welche beschränkten Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, das Dirichletproblem für die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} & u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ & \Delta u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \\ & u(x) = h(x) \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit beliebig vorgegebener Funktion $h = h(x) \in C^0(\partial\Omega)$ lösbar ist. In Satz 1.4 haben wir bereits eine (explizite) Lösung in der Kugel $\Omega = B_R$ gefunden, nämlich das Poissonsche Integral (1.18).

Aus dem Maximum- und Minimumprinzip, Satz 2.3, bzw. Folgerung 2.2 wissen wir bereits, dass eine Lösung von (4.1), wenn sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Die Differenz zweier Lösungen ist nämlich harmonisch in Ω und verschwindet auf $\partial\Omega$, also auch in ganz Ω. Der folgende Satz impliziert zwar ebenfalls die eindeutige Lösbarkeit von (2.3), zeigt aber auch mehr:

Satz 4.1: *Es seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen der Dirichletprobleme*

$$\Delta u_k = 0 \quad \textit{in } \Omega, \qquad u_k = h_k \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

zu vorgegeben $f_1, f_2 \in C^0(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \sup_{\partial\Omega} |h_1 - h_2| \quad \textit{für alle } x \in \overline{\Omega}. \tag{4.2}$$

Bemerkung: Hat man also z.B. eine Schar von Randdaten $h = h(x;\lambda) \in C^0(\partial\Omega \times \Lambda)$ mit einem Parameter $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$, so hängt auch die Lösung $u = u(x;\lambda)$ von (4.1), falls existent, stetig von λ ab, d.h.$u \in C^0(\overline{\Omega} \times \Lambda)$.

Andererseits folgt für $f_1 \equiv f_2$ wieder $u_1 \equiv u_2$ in Ω, also Eindeutigkeit.

Beweis von Satz 4.1: Wir betrachten die Funktion $v := (u_1 - u_2)^2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und berechnen

$$\begin{aligned} \nabla v &= 2(u_1 - u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2), \\ \Delta v &= \operatorname{div} \nabla v = 2|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + 2(u_1 - u_2)(\Delta u_1 - \Delta u_2) \geq 0, \end{aligned}$$

d.h. v ist subharmonisch in Ω (nach Satz 2.2) und hat die stetigen Randwerte

$$v = h := (h_1 - h_2)^2 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Folgerung 2.2 des Maximumprinzips liefert also

$$|u_1(x) - u_2(x)|^2 = v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} h = (\sup_{\partial\Omega} |h_1 - h_2|)^2 \quad \text{in } \Omega,$$

bzw. die Relation (4.2). q.e.d.

Zum Beweis der Existenz einer Lösung des Dirichletproblems für eine große Klasse von beschränkten Gebieten verwenden wir eine von O. Perron vorgeschlagene Methode. Wir starten mit dem folgenden

Hilfssatz 4.1: *Sei $u = u(x) \in C^0(\Omega)$ eine subharmonische Funktion. Zu $a \in \Omega$ und $R > 0$ mit $B_R(a) \subset\subset \Omega$ setzen wir*

$$p(x) := \frac{1}{R\sigma_n} \int\limits_{|y-a|=R} \frac{|y-a|^2 - |x-a|^2}{|y-x|^n} u(y)\, d\sigma(y), x \in B_R(a),$$

für das Poissonsche Integral. Dann ist die harmonisch abgeänderte Funktion

$$\overline{u}(x) := [u]_{a,R}(x) := \begin{cases} p(x), & x \in B_R(a) \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B_R(a) \end{cases}, \tag{4.3}$$

subharmonisch in Ω, und es gilt

$$\overline{u}(x) = [u]_{a,R}(x) \geq u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{4.4}$$

Beweis: Da $p = p(x)$ harmonisch in $B_R(a)$ ist, folgt $\overline{u} \geq u$ in $B_R(a)$ aus dem Maximumprinzip, und in $\Omega \setminus B_R(a)$ haben wir ja $\overline{u} \equiv u$, d.h. (4.4) folgt.

Sei nun $\xi \in \Omega$, $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(\xi) \subset\subset \Omega$ beliebig und eine harmonische Funktion $v \in C^0(\overline{B_\varrho(\xi)})$ mit $v \geq \overline{u}$ auf $\partial B_\varrho(\xi)$ gewählt. Zu zeigen ist $v \geq \overline{u}$ in $B_\varrho(\xi)$. Dann ist nämlich Eigenschaft (E) aus Satz 2.5 erfüllt und dieser liefert die Subharmonizität von $\overline{u} = [u]_{a,R}$.

Natürlich ist $v \geq \overline{u}$ in $B_\varrho(\xi)$, wenn $B_\varrho(\xi) \subset B_R(a)$ oder $B_\varrho(\xi) \subset \Omega \setminus B_R(a)$ gilt. Anderenfalls betrachten wir die Menge $\Theta := B_\varrho(\xi) \cap B_R(a)$ und zeigen $v \geq \overline{u}$ getrennt in $B_\varrho(\xi) \setminus \Theta$ und Θ:

Zunächst ist $v \geq u$ in $B_\varrho(\xi)$. In der Tat liefert (4.4) $v \geq \overline{u} \geq u$ auf $\partial B_\varrho(\xi)$ und das Maximumprinzip für die subharmonische Funktion $u - v$ dann auch in $B_\varrho(\xi)$. Da nun $u = \overline{u}$ in $\Omega \setminus B_R(a)$ richtig ist, folgt insbesondere $v \geq \overline{u}$ in $B_\varrho(\xi) \setminus B_R(a) = B_\varrho(\xi) \setminus \Theta$. Schließlich wissen wir nun $v \geq \overline{u}$ auf $\partial\Theta$. Und da $v - \overline{u} = v - p$ in Θ harmonisch ist, finden wir $v \geq \overline{u}$ in Θ, also die Behauptung.
q.e.d.

Definition 4.1: *Sei $h \in C^0(\partial\Omega)$. Eine subharmonische Funktion $v \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt* Subfunktion zu *h, falls*

$$v \leq h \quad \text{auf } \partial\Omega$$

richtig ist. Mit $\mathcal{S}_h$ bezeichnen wir die Menge aller solcher Subfunktionen bez. h.

Bemerkung: Wegen $v \equiv \inf_{\partial\Omega} h \in \mathcal{S}_h$ ist $\mathcal{S}_h$ nicht leer. Ist $u = u(x)$ eine Lösung des Dirichletproblems (4.1), so folgt aus dem Maximumprinzip $u \geq v$ in $\overline{\Omega}$ für alle $v \in \mathcal{S}_h$ und somit $u = \sup_{v \in \mathcal{S}_h} v$ in Ω. Dies erklärt den folgenden Ansatz:

Satz 4.2: *Zu vorgegebenem $h \in C^0(\partial\Omega)$ setzen wir*

$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{S}_h} v(x), \quad x \in \Omega.$$

Dann ist u harmonisch in Ω, und es gilt

$$\inf_{\partial\Omega} h =: m \leq u(x) \leq M := \sup_{\partial\Omega} h \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{4.5}$$

Beweis:

1. Da alle $v \in \mathcal{S}_h$ gemäß $v \leq \sup_{\partial\Omega} h$ in Ω nach oben beschränkt sind,ist u wohl definiert und die rechte Ungleichung in (4.5) ist klar. Da ferner $v \equiv m = \inf_{\partial\Omega} h \in \mathcal{S}_h$ gilt, folgt auch die linke Ungleichung in (4.5).

2. Sei nun $a \in \Omega$ beliebig gewählt. Per Definition existiert dann eine Funktionenfolge $\{v_k\}_{k=1,2,\ldots} \subset \mathcal{S}_h$ mit
$$\lim_{k\to\infty} v_k(a) = u(a). \tag{4.6}$$
Setzen wir $u_k(x) := \max(v_1(x), \ldots, v_k(x))$, $x \in \Omega$, für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so folgt $\{u_k\}_k \subset \mathcal{S}_h$ nach Folgerung 2.3, und es gilt $u_k \leq u_{k+1}$ in Ω für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner entnehmen wir der Ungleichung $v_k \leq u_k \leq u$ in Ω und der Relation (4.6):
$$\lim_{k\to\infty} u_k(a) = u(a). \tag{4.7}$$
Ist nun $R > 0$ gewählt mit $B_R(a) \subset\subset \Omega$. Dann betrachten wir die harmonisch abgeänderten Funktionen $\overline{u}_k = [u_k]_{a,R}$. Gemäß Hilfssatz 4.1 gilt $\{\overline{u}_k\}_k \subset \mathcal{S}_h$ und nach dem Maximumprinzip auch $\overline{u}_k \leq \overline{u}_{k+1}$ in Ω, da schon $\{u_k\}_k$ schwach monoton wachsend war in Ω. Schließlich entnehmen wir (4.4) noch $u_k \leq \overline{u}_k \leq u$ in Ω, so dass (4.7) liefert
$$\lim_{k\to\infty} \overline{u}_k(a) = u(a). \tag{4.8}$$
Da nun die Folge $\{\overline{u}_k\}_k$ auf $B_R(a)$ harmonisch und schwach monoton wachsend ist, konvergiert sie nach dem Harnackschen Konvergenzsatz, Satz 3.2, in $B_r(a)$, $r \in (0, R)$, gleichmäßig gegen die harmonische Funktion $v = v(x) := \lim_{k\to\infty} \overline{u}_k(x)$, $x \in B_r(a)$, und es gilt
$$v(a) = u(a), \qquad v \leq u \quad \text{in } B_r(a). \tag{4.9}$$

3. Wir zeigen noch $v \equiv u$ in $B_r(a)$, d.h. u ist harmonisch in $B_r(a)$ und damit in ganz Ω, da $a \in \Omega$ beliebig gewählt war.

   Angenommen es gibt ein $\xi \in B_r(a)$ mit
$$v(\xi) < u(\xi). \tag{4.10}$$

Per Definition existiert dann ein $\tilde{u} \in \mathcal{S}_h$ mit

$$v(\xi) < \tilde{u}(\xi). \tag{4.11}$$

Setzen wir nun $w_k := \max(u_k, \tilde{u}) \in \mathcal{S}_h$ mit den oben erklärten $u_k \in \mathcal{S}_h$, $k = 1, 2, \ldots$, so ist wieder $w_k \leq w_{k+1}$ in Ω und (4.7) liefert

$$\lim_{k\to\infty} w_k(a) = u(a).$$

Ändern wir w_k harmonisch zu $\overline{w}_k = [w_k]_{a,R}$ ab, so finden wir wie in Teil 2 – ersetze einfach überall u_k durch w_k – ein harmonisches $w := \lim_{k\to\infty} \overline{w}_k$ in $B_r(a)$ mit der Eigenschaft $w(a) = u(a)$. Da aber per Konstruktion $w_k \geq u_k$ und somit auch $\overline{w}_k \geq \overline{u}_k$ in Ω richtig ist, liefert Grenzübergang

$$v \leq w \quad \text{in } B_r(a), \quad v(a) = w(a).$$

Das Maximumprinzip für die harmonische Funktion $v - w$ impliziert also $v \equiv w$ in $B_r(a)$. Dies steht im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \lim_{k\to\infty} \overline{w}_k(\xi) = \lim_{k\to\infty} \overline{\max(u_k, \tilde{u})}(\xi) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \overline{\tilde{u}}(\xi) \overset{(4.4)}{\geq} \tilde{u}(\xi) \overset{(4.11)}{>} v(\xi). \end{aligned}$$

Also war die Annahme (4.10) falsch und $v \equiv u$ in $B_r(a)$ folgt.

q.e.d.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die in Satz 4.2 konstruierte harmonische Funktion $u = \sup_{v\in\mathcal{S}_h} v$ auch die Randwerte $h \in C^0(\partial\Omega)$ annimmt. Dazu benötigen wir die folgende

Definition 4.2: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ein Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ heißt* regulär*, falls es eine superharmonische Funktion $b(x) = b(x; x_0) \in C^0(\overline{\Omega})$ gibt mit den Eigenschaften*

$$b(x) > 0 \quad \textit{in } \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}, \quad b(x_0) = 0.$$

Sind alle Randpunkte $x_0 \in \partial\Omega$ regulär, so heißt Ω Dirichletgebiet*.*

Bemerkung:

1. Ein Dirichletgebiet muss nicht notwendig Normalgebiet im Sinne von Definition 1.2 sein.

2. Die in Definition 4.2 angegebene Funktion $b(x; x_0)$ heißt *Barriere* in x_0 bez. Ω.

3. Die Regularität eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ ist eine lokale Eigenschaft: x_0 ist genau dann regulär, wenn es eine *lokale Barriere* $b_L(x) = b_L(x;x_0) \in C^0(\overline{\Omega \cap B_r(x_0)})$ gibt mit einem $r > 0$ und mit

$$b_L(x) > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega \cap B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}, \qquad b_L(x_0) = 0.$$

Beweis: Ist b_L lokale Barriere in x_0 und setzen wir $m := \inf\limits_{\substack{\frac{r}{2}<|x-x_0|<r \\ x\in\Omega}} b_L(x) > 0$, so ist

$$b(x;x_0) := \begin{cases} m, & x \in \overline{\Omega} \setminus B_r(x_0) \\ \min(m, b_L(x)), & x \in \overline{\Omega \cap B_r(x_0)} \end{cases}$$

Barriere in x_0 bez. Ω. Umgekehrt ist natürlich jede Barriere auch lokale Barriere.

Hilfssatz 4.2: *Zu $h \in C^0(\partial\Omega)$ setzen wir $u := \sup_{v\in\mathcal{S}_h} v$. Ist nun $x_0 \in \partial\Omega$ regulärer Randpunkt, so folgt*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\Omega}} u(x) = h(x_0). \tag{4.12}$$

Beweis: Wir setzen wieder $m := \inf_{\partial\Omega} h$, $M := \sup_{\partial\Omega} h$. Wegen $h \in C^0(\partial\Omega)$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass gilt

$$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega \,:\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

Ist $b(x) = b(x;x_0)$ eine Barriere in x bez. Ω, so setzen wir noch

$$\eta(\varepsilon) := \inf_{\substack{|x-x_0|\geq\delta(\varepsilon) \\ x\in\Omega}} b(x) > 0$$

und betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} v^+(x) &:= h(x_0) + \varepsilon + (M-m)\frac{b(x)}{\eta(\varepsilon)}, \\ v^-(x) &:= h(x_0) - \varepsilon - (M-m)\frac{b(x)}{\eta(\varepsilon)}, \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

$v^\pm$ sind hier so definiert, dass

$$v^-(x) \leq h(x) \leq v^+(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega$$

richtig ist; zum Nachrechnen unterscheide man die Fälle $|x - x_0| \lesseqgtr \delta(\varepsilon)$.

Nun ist v^- subharmonisch und somit $v^- \in \mathcal{S}_h$ richtig. Andererseits ist für alle $v \in \mathcal{S}_h$ die Funktion $v - v^+$ subharmonisch mit $v - v^+ \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Das Maximumprinzip liefert also $v \leq v^+$ in Ω und nach sup-Bildung über $\mathcal{S}_h$ folgt

$$v^- \leq u = \sup_{v\in\mathcal{S}_h} v \leq v^+ \quad \text{in } \Omega.$$

Setzen wir die Definition von $v^{\pm}$ ein und stellen um, so folgt

$$|u(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon + \frac{M - m}{\eta(\varepsilon)} b(x), \quad x \in \Omega.$$

Da nun $b(x) \to b(x_0) = 0$ für $x \to x_0$ richtig ist, existiert ein $\delta^*(\varepsilon) > 0$ mit

$$|u(x) - h(x_0)| \leq 2\varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega \,:\, |x - x_0| \leq \delta^*(\varepsilon).$$

Das ist gerade die behauptete Relation (4.12). q.e.d.

Satz 4.3: (Dirichletproblem)
Das Dirichletproblem (4.1) ist genau dann für jedes $h \in C^0(\partial\Omega)$ lösbar, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Dirichletgebiet ist. Die Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ist dann eindeutig bestimmt und hängt stetig von den Randwerten ab.

Beweis: Ist Ω Dirichletgebiet, so löst $u := \sup_{v \in \mathcal{S}_h} v$ das Problem (4.1) gemäß Satz 4.2 und Hilfssatz 4.2. Und nach Satz 4.1 ist u eindeutig bestimmt und hängt stetig von den Randwerten ab.

Existiert umgekehrt zu jedem $h \in C^0(\partial\Omega)$ eine Lösung von (4.1), so insbesondere auch für $h = h(x) := |x - x_0|$, $x \in \partial\Omega$, mit festem $x_0 \in \partial\Omega$. Die zugehörige Lösung u von (4.1) erfüllt dann

$$u(x) > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}, \qquad u(x_0) = 0$$

nach dem Maximumprinzip, Folgerung 2.2. Somit ist $b := u$ eine Barriere in x_0 bez. Ω, d.h. der beliebig gewählte Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ ist regulär. q.e.d.

Bemerkung: Es gibt beschränkte Gebiete, für die das Dirichletproblem nicht zu beliebigen stetigen Randwerten lösbar ist. Z.B. sei $\Omega := B_R \setminus \{0\}$, d.h. $\partial\Omega = \partial B_R \cup \{0\}$, und wir betrachten die stetigen Randwerte

$$h(x) := \begin{cases} 0, & x \in \partial B_R \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Nach Satz 2.7 wäre eine Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{B_R})$ von (4.1) harmonisch auf B_R fortsetzbar. Wegen $u|_{\partial B_R} \equiv 0$ muss dann nach dem Maximumprinzip $u \equiv 0$ gelten, im Widerspruch zu $u(0) = 1$.

Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Dirichletproblems:

Satz 4.4: *Ein Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ ist regulär, falls eine Kugel $B_R(a)$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $r \in (0, +\infty)$ so existiert, dass $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(a)} = \{x_0\}$ richtig ist.*

Beweis: Wir wählen die Barrierefunktion

$$\phi(y) = \phi(y;x_0) := \begin{cases} \log(\frac{|y-a|}{r}), & n=2 \\ r^{2-n} - |y-a|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}, \quad y \in \Omega.$$

Dann ist $\phi \in C^0(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω (da $a \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$) und wir haben

$$\begin{aligned} &\phi(y) > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus \{x_0\} \quad (\text{wegen } |y-a| > r), \\ &\phi(x_0) = 0 \quad (\text{wegen } |x-a| = r). \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemerkung: Insbesondere ist jedes beschränkte, konvexe Gebiet und jedes C^2-Gebiet ein Dirichletgebiet.

Folgerung 4.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^2-Gebiet. Dann existiert die (eindeutig bestimmte) Greensche Funktion $\varphi_G = \varphi_G(y;x)$ zu Ω.*

Beweis: Nach Satz 4.4 ist Ω Dirichletgebiet und nach früheren Bemerkungen auch Normalgebiet. Zu den stetigen Randdaten

$$h = h(y;x) := -\Gamma(|y-x|), \quad y \in \partial\Omega,$$

mit festem Parameter $x \in \Omega$ lösen wir das Dirichletproblem (4.1) gemäß Satz 4.3; hierbei ist $\Gamma = \Gamma(r)$, $r > 0$, wie in (1.5) erklärt. Die Lösung $\psi(y;x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ist dann harmonisch bez. $y \in \Omega$. Da $h(y;x)$ stetig von $x \in \Omega$ abhängt, gilt dies nach Satz 4.1 auch für ψ, d.h. $\psi(y;x) \in C^0(\Omega \times \Omega)$. Außerdem gehört die Abbildung $y \mapsto \psi(y;x)$ zu $C^1(\overline{\Omega})$ für jedes $x \in \Omega$; dies folgt wegen $h \in C^2(\partial\Omega)$ und da Ω ein C^2-Gebiet ist aus der Regularitätstheorie für lineare, elliptische Gleichungen (kommt vielleicht später). Schließlich erfüllt

$$\varphi_G = \varphi_G(y;x) := \Gamma(|y-x|) + \psi(y;x)$$

noch die Randbedingung $\varphi_G(y;x) = 0$ für alle $y \in \partial\Omega$, $x \in \Omega$. Also ist φ_G die gesuchte Greensche Funktion.

q.e.d.

Kapitel 2

Maximumprinzipien

1 Lineare Gleichungen

Wir betrachten den *linearen Differentialoperator zweiter Ordnung* $\mathcal{L} = \mathcal{L}u\colon C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$:

$$\mathcal{L}u(x) := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)u_{x^j x^k}(x) + \sum_{k=1}^{n} u_{x^k}(x) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

mit einer beschränkten, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dabei seien die Koeffizientenfunktionen $a_{jk}, b_k, c \in C^0(\Omega)$, stetig und beschränkt, d.h. es gibt ein $K > 0$, so dass

$$|a_{jk}(x)|, |b_k(x)|, |c(x)| < K \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (j,k = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

erfüllt ist. Ferner sei die Matrix $A(x) := (a_{jk}(x))_{j,k=1,\ldots,n}$ für alle $x \in \Omega$ symmetrisch. Schließlich schreiben wir noch $b(x) := (b_1, \ldots, b_n(x))$.

Definition 1.1: *Der Operator $\mathcal{L} = \mathcal{L}u$ aus (1.1) heißt* elliptisch in $\Theta \subset \overline{\Omega}$ *(bzw.* degeneriert elliptisch in Θ*), falls $A = A(x) \in C^0(\Theta)$ und*

$$\begin{gathered}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\zeta_j\zeta_k =: \langle \zeta, A(x)\zeta \rangle > 0 \quad \textit{(bzw. } \geq 0\textit{)} \\ \textit{für alle } \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \textit{ und alle } x \in \Theta\end{gathered} \tag{1.3}$$

erfüllt ist. $\mathcal{L}$ heißt gleichmäßig elliptisch in Θ*, falls eine Konstante $m > 0$ so existiert, dass gilt*

$$\langle \zeta, A(x)\zeta \rangle \geq m|\zeta|^2 \quad \textit{für alle } \zeta \in \mathbb{R}^n \quad \textit{und alle } x \in \Theta. \tag{1.4}$$

Bemerkungen:

1. In einer beliebigen Menge $\Theta \subset \overline{\Omega}$ ist offenbar jeder gleichmäßig elliptische Operator elliptisch und jeder elliptische Operator degeneriert elliptisch. Wichtige Beispiele degeneriert elliptischer Operatoren sind parabolische Operatoren, wie etwa $\mathcal{L}u := u_t - \Delta_x u$.

2. Ist $\Theta \subset \overline{\Omega}$ kompakt, so ist auch jeder elliptische Operator gleichmäßig elliptisch mit
$$m := \min_{\substack{\zeta\in\mathbb{R}^n:\,|\zeta|=1\\ x\in\Theta}} \langle \zeta, A(x)\zeta\rangle > 0.$$

Im wichtigen Fall $c \equiv 0$ in (1.1) nennen wir den Operator *reduzierter Differentialoperator* und schreiben

$$\mathcal{L}_0 u(x) := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) u_{x^j x^k}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) u_{x^k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Wir beginnen mit dem einfachen

Hilfssatz 1.1: *Sei $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 u$, $u = u(x) \in C^2(\Omega)$, ein reduzierter, degeneriert elliptischer Differentialoperator auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Im Punkt $z \in \Omega$ nehme u ihr Maximum an, d.h. $u(x) \le u(z)$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt $\mathcal{L}_0 u(z) \le 0$.*

Beweis: Da u in $z \in \Omega$ maximal wird, gilt natürlich $Du(z) = 0$ und $\langle \zeta, D^2u(z)\zeta\rangle \le 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Da ferner $A(z)$ positiv semidefinit ist, existiert bekanntlich eine orthogonale Matrix $O = (o_{jk})_{j,k=1,\ldots}$, so dass gilt $A(z) = O^t \circ \Lambda \circ O$ mit $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, die Eigenwerte von $A(z)$. Schreiben wir noch $\Lambda^{\frac{1}{2}} := \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ und $T = (t_{jk})_{j,k=1,\ldots,n} := \Lambda^{\frac{1}{2}} \circ O$, so folgt

$$A(z) = O^t \circ \Lambda \circ O = O^t \circ (\Lambda^{\frac{1}{2}})^t \circ \Lambda^{\frac{1}{2}} \circ O = T^t \circ T = \left(\sum_{l=1}^{n} t_{lj} t_{lk}\right)_{j,k=1,\ldots,n}.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 u(z) &= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(z) u_{x^j x^k}(z) + \sum_{k=1}^{n} b_k(z) u_{x^k}(z) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} t_{lj} t_{lk}\right) u_{x^j x^k}(z) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} u_{x^j x^k}(z) t_{lj} t_{lk}\right) \le 0,
\end{aligned}$$

wie behauptet. q.e.d.

Satz 1.1: (Schwaches Maximumprinzip)
Auf der offenen, beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sei* $\mathcal{L} = \mathcal{L}u$ *ein degeneriert elliptischer Operator, der nicht vollständig entartet sei, d.h. es gibt ein* $\zeta^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, so dass*

$$\langle \zeta^*, A(x)\zeta^* \rangle > 0 \quad \textit{für alle } x \in \Omega \tag{1.6}$$

richtig ist. Dann gilt:

(i) Ist $c \equiv 0$ *in* Ω *und für* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *gelte* $\mathcal{L}u = \mathcal{L}_0 u \geq 0$ (≤ 0) *in* Ω*, dann folgt*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad (\geq \min_{\partial\Omega} u) \quad \textit{für alle } x \in \Omega.$$

(ii) Ist $c \leq 0$ *in* Ω *und für* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *gelte* $\mathcal{L}u \geq 0$ (≤ 0) *in* Ω*, so folgt*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \quad (\geq \min_{\partial\Omega} u^-) \quad \textit{für alle } x \in \Omega$$

mit $u^+(x) := \max(u(x), 0)$*,* $u^-(x) := \min(u(x), 0)$*.*

Beweis: Es genügt die Aussagen für Lösungen von $\mathcal{L}u \geq 0$ zu beweisen, denn $\mathcal{L}(-u) = -\mathcal{L}u$.

(i) Zu hinreichend kleinem $\delta > 0$ betrachten wir $\Omega_\delta := \{x \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Wegen $a_{jk} \in C^0(\overline{\Omega_\delta})$ gibt es dann eine Konstante $m > 0$, so dass

$$\langle \zeta^*, A(x)\zeta^* \rangle \geq m|\zeta^*|^2 \quad \text{in } \Omega_\delta \tag{1.7}$$

richtig ist. O.B.d.A. sei nun $|\zeta^*| = 1$. Wir setzen

$$v(x) := e^{\lambda\langle x, \zeta^* \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit noch zu bestimmendem $\lambda > 0$. Dann haben wir

$$v_{x^j}(x) = \lambda \zeta_j^* e^{\lambda\langle x, \zeta^* \rangle}, \quad v_{x^j x^k}(x) = \lambda^2 \zeta_j^* \zeta_k^* e^{\lambda\langle x, \zeta^* \rangle}.$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ berechnen wir nun in Ω_δ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(u + \varepsilon v) &= \mathcal{L}_0 u + \varepsilon \mathcal{L}_0 v \\
&\geq \varepsilon \left(\lambda^2 \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \zeta_j^* \zeta_k^* + \lambda \sum_{k=1}^n b_k(x) \zeta_k^* \right) e^{\lambda\langle x, \zeta^* \rangle} \\
&= \varepsilon e^{\lambda\langle x, \zeta^* \rangle} \big(\lambda^2 \langle \zeta^*, A(x)\zeta^* \rangle + \lambda \langle b(x), \zeta^* \rangle \big) \\
&\overset{(1.7),\,(1.2)}{\geq} \varepsilon \lambda e^{\lambda\langle x, \zeta^* \rangle} (\lambda m - K) \;>\; 0
\end{aligned}$$

für $\lambda > \frac{K}{m}$. Nach Hilfssatz 1.1 haben wir dann

$$u(x) + \varepsilon v(x) < \max_{\partial\Omega_\delta}(u + \varepsilon v) \leq \max_{\partial\Omega_\delta} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega_\delta} v \quad \text{in } \Omega_\delta.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ liefert also die Behauptung (i).

(ii) Wir betrachten die offene Menge $\Omega^+ := \{x \in \Omega \,:\, u(x) > 0\}$. Falls $\Omega^+ = \emptyset$, d.h. $u(x) \le 0$ in $\overline{\Omega}$, ist nichts zu zeigen. Anderenfalls entnehmen wir $c(x) \le 0$ in Ω:

$$\mathcal{L}_0 u(x) = \mathcal{L}u(x) - c(x)u(x) \ge 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Teil (i) zeigt also

$$u(x) \le \max_{\partial\Omega^+} u \quad \text{in } \Omega^+. \tag{1.8}$$

Nun haben wir $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$ und $u \ge 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$. Also gilt wegen $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Omega) \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega)$:

$$\max_{\partial\Omega^+} u = \max_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u = \max_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u^+ \le \max_{\partial\Omega} u^+. \tag{1.9}$$

Wegen $u(x) \le 0$ in $\Omega \setminus \Omega^+$ gilt schließlich (1.8) auch in Ω und zusammen mit (1.9) folgt

$$u(x) \le \max_{\partial\Omega} u^+ \quad \text{in } \Omega,$$

also die Behauptung. q.e.d.

Bemerkung: Auf die Forderung $c \le 0$ in Ω kann in Aussage (ii) nicht ersatzlos verzichtet werden. Ist etwa $\Omega = (0,\pi)^n \subset \mathbb{R}^n$, so löst $u = u(x) := \sin x^1 \cdot \ldots \cdot \sin x^n$ das Dirichletproblem

$$\Delta u(x) + nu(x) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

d.h. keine (ii) entsprechende Aussage gilt.

Wir können nun das schwache Maximumprinzip nutzen, um a-priori-Abschätzungen für den Betrag einer Lösung des Dirichletproblems

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.10}$$

zu geben. Dazu müssen wir die Voraussetzungen von Satz 1.1 leicht verschärfen:

Satz 1.2: (A-priori-Abschätzung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\mathcal{L} = \mathcal{L}u$ sei degeneriert elliptisch mit $c(x) \le 0$ in Ω. Zusätzlich gäbe es eine Konstante $m > 0$ und ein $\zeta^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass

$$\langle \zeta^*, A(x)\zeta^* \rangle \ge m|\zeta^*|^2 \quad \textit{für alle } x \in \Omega \tag{1.11}$$

erfüllt ist. Ist dann $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (1.10) mit gegebenen Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$, so existiert eine Konstante $\gamma = \gamma(m, K, \Omega) \ge 0$, so dass gilt

$$|u(x)| \le \max_{\partial\Omega} |g| + \gamma(m,K,\Omega) \sup_{\Omega} |f| \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{1.12}$$

Folgerung 1.1: (Eindeutigkeit und Stabilität)
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2 ist die Lösung des Dirichletproblems (1.10) eindeutig bestimmt und hängt stetig von den Daten $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$ ab.

Beweis von Satz 1.2: Wir betrachten wieder die Funktion $v(x) := e^{\lambda\langle x,\zeta^*\rangle}$, wobei wir wieder $|\zeta^*| = 1$ annehmen. Wir berechnen dann m.H. von (1.2) und (1.11):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v = \mathcal{L}_0 v + cv &= e^{\lambda\langle x,\zeta*\rangle}\Big(\lambda^2\langle\zeta^*, A(x)\zeta^*\rangle + \lambda\langle b(x),\zeta^*\rangle + c(x)\Big) \\ &\geq e^{\lambda\langle x,\zeta^*\rangle}\big(\lambda^2 m - \lambda K - K\big) \;\geq\; e^{\lambda\langle x,\zeta^*\rangle} \quad \text{in } \Omega,\end{aligned}$$

wenn wir $\lambda = \lambda(m,K) > 0$ so groß wählen, dass $\lambda^2 m - \lambda K - K \geq 1$ gilt. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $R = R(\Omega) > 0$, so dass $\Omega \subset B_R$ richtig ist. Dann haben wir

$$\mathcal{L}v \geq e^{-\lambda R} \quad \text{in } \Omega, \quad v \leq e^{\lambda R} \quad \text{in } \Omega. \tag{1.13}$$

Wir setzen nun

$$w(x) := \pm u(x) + \varrho\big(v(x) - e^{\lambda R}\big) - \max_{\partial\Omega}|g|$$

mit noch zu bestimmendem $\varrho > 0$. Dann können wir wegen $c \leq 0$ in Ω abschätzen

$$\mathcal{L}w(x) = \pm\mathcal{L}u(x) + \varrho\mathcal{L}v(x) - c(x)\big(\varrho e^{\lambda R} + \max_{\partial\Omega}|g|\big) \overset{(1.13)}{\geq} \pm f(x) + \varrho e^{-\lambda R}.$$

Wählen wir $\varrho := e^{\lambda R}\sup_\Omega |f|$, so folgt $\mathcal{L}w \geq 0$ in Ω. Nach Satz 1.1 (ii) finden wir also $w(x) \leq \max_{\partial\Omega} w^+$ in Ω. Wegen

$$w = \pm u + \varrho(v - e^{\lambda R}) - \max_{\partial\Omega}|g| \overset{(1.13)}{\leq} \pm g - \max_{\partial\Omega}|g| \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ist schließlich $w^+ \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ und daher $w(x) \leq 0$ in Ω bzw.

$$\pm u(x) \leq \max_{\partial\Omega}|g| + \varrho\big(e^{\lambda R} - v(x)\big) \leq \max_{\partial\Omega}|g| + e^{2\lambda R}\sup_\Omega|f|,$$

also die Behauptung mit $\gamma(m,K,\Omega) = e^{2\lambda(m,K)R(\Omega)}$. q.e.d.

Satz 1.1 heißt „schwaches Maximumprinzip“, da nicht ausgeschlossen wird, dass eine nicht konstante Funktion ihr Maximum in einem inneren Punkt annimmt. Das wollen wir i.F. noch ausschließen, zumindest für gleichmäßig elliptische PDG. Wir benötigen zuächst noch die folgende

Definition 1.2: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge. Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ heißt C^k-*Randpunkt *von Ω, wenn es ein $r > 0$ und eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \in C^k(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$ so gibt, dass – nach eventueller Umbennung und Umorientierung der Koordinatenachsen – gilt:*

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \big\{x \in B_r(x_0) \;:\; x^n > \gamma(x^1,\dots,x^{n-1})\big\}.$$

Bemerkungen:

1. Insbesondere ist also jeder Randpunkt eines C^k-Gebietes auch C^k-Randpunkt.

2. Für $k \geq 2$ existiert zum C^k-Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ ein $a \in \Omega$ und ein $\varrho > 0$, so dass $B_\varrho(a) \subset \Omega \cap B_r(x_0)$ und $x_0 \in \partial B_\varrho(a)$ richtig ist. Für die äußere Normale $\nu = \nu(x_0)$, die natürlich auch schon für $k = 1$ existiert, gilt dann
$$\nu(x_0) = \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} = \frac{1}{\varrho}(x_0 - a).$$

Satz 1.3: (Hopfsches Maximumprinzip)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{L} = \mathcal{L}u$ ein dort gleichmäßig elliptischer Differentialoperator, für den gelte $c(x) \leq 0$ in Ω. Weiter sei $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $\mathcal{L}u \geq 0$ in Ω. Dann gilt:

(i) Nimmt $u = u(x)$ im Punkt $x_0 \in \Omega$ ihr nicht negatives Maximum an, so folgt $u(x) \equiv u(x_0)$ für alle $x \in \Omega$, d.h. u ist konstant.

(ii) $u = u(x)$ nehme in einem C^2-Randpunkt ihr nicht negatives Maximum an und es gelte: Mit einem $r > 0$ ist $u \in C^1(\overline{\Omega \cap B_r(x_0)})$ und die Ungleichung
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \langle Du(x_0), \nu(x_0)\rangle \leq 0$$
sei erfüllt. Dann folgt $u(x) \equiv u(x_0)$ für alle $x \in \Omega$.

(iii) Falls $c(x) \equiv 0$ in Ω, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ richtig ist, so sind beide Aussagen für beliebige, nicht notwendig nicht negative Maxima richtig.

Bemerkung: Ein entsprechendes Minimumprinzip für Lösungen der Ungleichung $\mathcal{L}u \leq 0$ in Ω erhält man durch Übergang $u \mapsto -u$.

Bevor wir zum Beweis von Satz 1.3 übergehen, wollen wir noch eine typische Folgerung angeben:

Folgerung 1.2: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ eine eventuell leere Teilmenge, so dass $\partial\Omega \setminus \Gamma$ abgeschlossen ist und jeder Punkt $x_0 \in \Gamma$ ein C^2-Randpunkt ist. Ferner seien Funktionen $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega \setminus \Gamma)$ und $h \in C^0(\Gamma)$ gegeben. Schließlich seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen von*
$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}u(x) \geq f(x) & \text{in } \Omega, & \mathcal{L}v(x) \leq f(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) \leq g(x) & \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, & u(x) \geq g(x) & \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \leq h(x) & \text{auf } \Gamma, & \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \geq h(x) & \text{auf } \Gamma \end{array} \tag{1.14}$$
mit einem in Ω gleichmäßig elliptischen Operator $\mathcal{L}$, der $c(x) \leq 0$ in Ω erfülle.
Behauptung: *Dann gilt $u(x) \leq v(x)$ in $\overline{\Omega}$.*

Bemerkung: Das Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = f &\quad \text{in } \Omega, \\ u = g &\quad \text{auf} \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} = h &\quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1.15}$$

nennt man *gemischtes Randwertproblem (für den Operator $\mathcal{L}$)*. Die in der Folgerung angegebenen Lösungen u, v von (1.14) heißen *Sub- bzw. Superlösungen* des gemischten Randwertproblems. Folgerung 1.2, ein sogenannter *Vergleichssatz*, impliziert nun: Das Problem (1.15) hat höchstens eine Lösung.

Übrigens erhalten wir für $\Gamma = \emptyset$ wieder das *Dirichletproblem (für $\mathcal{L}$)*. Der Fall $\Gamma = \partial\Omega$ war auszuschließen, da das sogenannte *Neumannproblem*

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{auf } \partial\Omega$$

z.B. für $c \equiv 0$ mit $u = u(x)$ auch die Lösung $\tilde{u}(x) := u(x) + k$ für eine beliebige Konstante $k \in \mathbb{R}$ besitzt, also insbesondere nicht eindeutig lösbar ist.

Beweis von Folgerung 1.2: Die Differenzfunktion $w := u - v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ genügt dem Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w \geq 0 &\quad \text{in } \Omega, \\ w \leq 0 &\quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \tfrac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 &\quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Sei nun $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$ gewählt. Ist $w(x_0) \leq 0$, so ist $w \leq 0$ bzw. $u \leq v$ in $\overline{\Omega}$ und nichts mehr zu zeigen. Sei also $w(x_0) > 0$. Wegen (1.16) nimmt dann w in einem Punkt $x_0 \in \Omega \cup \Gamma$ ihr positives Maximum an, woraus mit Satz 1.3 sofort $w \equiv \text{const} > 0$ folgt im Widerspruch zu $w \leq 0$ auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$.

q.e.d.

Zum Beweis des übrigens auch *starkes* oder *scharfes Maximumprinzip* genannten Satz 1.3 benötigen wir noch den

Hilfssatz 1.2: (Hopfsches Randpunktlemma)
Es sei $u \in C^2(B_\varrho(a)) \cap C^1(\overline{B_\varrho(a)})$ eine Lösung von $\mathcal{L}u \geq 0$ mit gleichmäßig elliptischem Operator $\mathcal{L} = \mathcal{L}u$, der $c \leq 0$ in Ω erfülle. In $x_0 \in \partial B_\varrho(a)$ nehme u ihr Maximum $u(x_0) \geq 0$ an, und es gelte $u(a) < u(x_0)$. Dann folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Bemerkung: Falls $c \equiv 0$ gilt, kann die Forderung $\max_{\overline{B_\varrho(a)}} u \geq 0$ fallengelassen werden. Falls nämlich $\max_{\overline{B_\varrho(a)}} u < 0$ gilt, gehen wir über zu $\tilde{u} := u - \max_{\overline{B_\varrho(a)}} u$.

Beweis von Hilfssatz 1.2:

1. Wir betrachten die Hilfsfunktion
$$v = v(x) := e^{-\lambda|x-a|^2} - e^{-\lambda\varrho^2}, \quad x \in \overline{B_\varrho(a)},$$
mit geeignetem $\lambda > 0$. Zunächst bemerken wir
$$v > 0 \quad \text{in } B_\varrho(a), \qquad v = 0 \quad \text{auf } \partial B_\varrho(a). \tag{1.17}$$
Wir berechnen
$$v_{x^j}(x) = -2\lambda(x^j - a^j)e^{-\lambda|x-a|^2},$$
$$v_{x^jx^k}(x) = \big[4\lambda^2(x^j - a^j)(x^k - a^k) - 2\lambda\delta^{jk}\big]e^{-\lambda|x-a|^2}$$
mit dem *Kroneckersymbol*
$$\delta^{jk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{falls } j \neq k \end{cases}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$
Es folgt also in $B_\varrho(a)$:
$$\begin{aligned} \mathcal{L}v(x) &= \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)v_{x^jx^k}(x) + \sum_{k=1}^n b_k(x)v_{x^k}(x) + c(x)v(x) \\ &= e^{-\lambda|x-a|^2}\Bigg[4\lambda^2\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)(x^j - a^j)(x^k - a^k) \\ &\quad -2\lambda\sum_{k=1}^n \big(a_{kk}(x) + b_k(x)(x^k - a^k)\big) + c(x)\Bigg] \\ &\geq e^{-\lambda|x-a|^2}\Big[4\lambda^2 m|x-a|^2 - 2\lambda nK(1 + |x-a|) - K\Big] \end{aligned} \tag{1.18}$$

2. Nun gilt $u(a) < u(x_0)$, so dass ein $r \in (0, \varrho)$ existiert, mit
$$u(x) \leq u(x_0) - k, \quad x \in \overline{B_r(a)}, \tag{1.19}$$
wobei $k := \frac{1}{2}[u(x_0) - u(a)] > 0$. Auf der Kugelschale $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < \varrho\}$ folgt dann aus (1.18):
$$\mathcal{L}v(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$
falls wir $\lambda > 0$ hinreichend groß wählen. Für die Funktion $w(x) := u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$, $\varepsilon > 0$ geeignet, erhalten wir somit
$$\mathcal{L}w = \mathcal{L}u + \varepsilon\mathcal{L}v - cu(x_0) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$
Satz 1.1 (ii) entnehmen wir also
$$w(x) \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{1.20}$$

3. In der Definition von $w = u + \varepsilon v - u(x_0)$ wählen wir nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\varepsilon v(x) \le k$ für alle $x \in B_r(a)$ gilt. Dann folgt $w \le 0$ auf $\partial\Omega$; vgl. (1.17), (1.19). Wegen (1.20) erhalten wir also

$$w(x) \le 0 \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}, \quad w(x_0) = 0.$$

Somit nimmt w in $x_0 \in \partial B_\varrho(a)$ ihr Maximum über $\overline{\Omega}$ an. Setzen wir noch $\tilde{w}(t) := w(a + t(x_0 - a))$, $t \in [\frac{r}{\varrho}, 1]$, so folgt

$$0 \le \tilde{w}'(1) = Dw(x_0) \cdot (x_0 - a) = \varrho \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0)$$

bzw.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \ge -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = 2\varepsilon\lambda\varrho e^{-\lambda\varrho^2} > 0,$$

wie behauptet. q.e.d.

Beweis von Satz 1.3:

(i) Die Lösung $u = u(x)$ von $\mathcal{L}u \ge 0$ nehme in $x_0 \in \Omega$ ihr positives Maximum an, d.h. $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u =: M$. Angenommen, es gibt ein $x_1 \in \Omega \setminus \{x_0\}$ mit $u(x_1) < M$. Da Ω zusammenhängend ist, existiert ein stetiger Weg $s_{[x_0,x_1]} \subset \Omega$ mit der Parametrisierung $s = s(t) \in C^0([0,1], \Omega)$, $s(0) = x_0$, $s(1) = x_1$. Wir betrachten dann die abgeschlossene Menge

$$T := \{t \in [0,1] \, : \, u(s(t)) = M\},$$

welche $0 \in T$ und $1 \notin T$ erfüllt. Also existiert ein maximales $t^* \in [0,1)$, so dass $t \in T$ bzw. $u(s(t)) = M$ für alle $t \le t^*$ richtig ist. Wir finden dann ein $\hat{t} > t^*$ und ein $\varrho > 0$, so dass $u(s(\hat{t})) < M$, $\overline{B_\varrho(s(\hat{t}))} \subset \Omega$ und $s(t^*) \in \partial B_\varrho(s(\hat{t}))$ gilt. Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.2 erfüllt und es folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(s(t^*)) > 0,$$

im Widerspruch zu $Du(s(t^*)) = 0$. Also war die Annahme falsch und wir finden $u \equiv M = u(x_0)$ in $\overline{\Omega}$.

(ii) Sei nun $x_0 \in \partial\Omega$ ein C^2-Randpunkt mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u = M$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \le 0$. Dann existieren nach Definition 1.2 und der anschließenden Bemerkung $a \in \Omega$ und $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(a) \subset \Omega$, $x_0 \in \partial B_\varrho(a)$ und $\nu(x_0) = \frac{1}{\varrho}(x_0 - a)$. Falls nun $u(a) < u(x_0)$ gilt, so liefert Hilfssatz 1.2 einen Widerspruch zur Annahme. Also folgt $u(a) = u(x_0) = M$ und nach (i) sofort $u \equiv u(x_0)$ in $\overline{\Omega}$.

(iii) Ist schließlich $c(x) \equiv 0$ in Ω und $u = u(x)$ eine Lösung von $\mathcal{L}u = \mathcal{L}_0 u \ge 0$ in Ω mit Maximum $M = \max_{\overline{\Omega}} u < 0$, so wenden wir (i), (ii) auf $\tilde{u} := u - M$ an. q.e.d.

2 Nichtlineare Gleichungen

Wir betrachten zunächst *quasilineare PDG*, d.h. Gleichungen die linear in den zweiten Ableitungen sind:

$$Q[u](x) := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\big(x, u(x), Du(x)\big) u_{x^j x^k}(x) + b\big(x, u(x), Du(x)\big), \quad x \in \Omega. \tag{2.1}$$

Dabei bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ immer ein beschränktes Gebiet und für die Koeffizientenfunktionen $a_{jk} = a_{jk}(x, z, p), b = b(x, z, p) \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gelte

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial z}, \frac{\partial a_{jk}}{\partial p_l}, \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial b}{\partial p_l} \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad j, k, l = 1, \ldots, n.$$

Schließlich sei die Matrix $A = A(x, z, p) := (a_{jk}(x, z, p))_{j,k=1,\ldots,n}$ für alle $(x, z, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ symmetrisch. Im einleitenden Kapitel 0, Beispiel 7, haben wir schon die Minimalflächengleichung als quasilineare Gleichung kennengelernt.

Definition 2.1: *Der quasilineare Differentialoperator* $Q = Q[u] : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ *aus (2.1) heißt* elliptisch in $\Theta \subset \overline{\Omega}$ für $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Theta)$, *falls*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\big(x, u(x), Du(x)\big)\zeta_j\zeta_k > 0 \quad \textit{für alle } \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \textit{ und alle } x \in \Theta \tag{2.2}$$

richtig ist. Q *heißt* elliptisch in Θ, *falls (2.2) für alle* u *erfüllt ist. Entsprechend heißt* Q gleichmäßig elliptisch in Θ (für u), *wenn gilt*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\big(x, u(x), Du(x)\big)\zeta_j\zeta_k \geq m|\zeta|^2 \quad \textit{für alle } \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \textit{ und alle } x \in \Theta \tag{2.3}$$

mit der Elliptizitätskonstante $m > 0$.

Bemerkung: Ist Q elliptisch (für u) in einem Kompaktum $\Theta \subset \overline{\Omega}$, so ist Q dort auch gleichmäßig elliptisch (für u).

Wir betrachten nun wieder das gemischte Randwertproblem aus (1.15): Man suche eine Lösung $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} &Q[u] = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ &u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hierbei ist $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ eine eventuell leere Teilmenge von $\partial\Omega$, so dass $\partial\Omega\backslash\Gamma$ abgeschlossen und jeder Punkt $x_0 \in \Gamma$ ein C^2-Randpunkt mit der äußeren Normale $\nu = \nu(x_0)$

ist; vgl. Definition 1.2. Ferner sind $g \in C^0(\partial\Omega \setminus \Gamma)$ und $h \in C^0(\Gamma)$ vorgegebene Funktionen. Analog zum linearen Fall nennen wir eine Funktion $v = v(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *Sublösung* (bzw. *Superlösung*) *des gemischten Randwertproblems (2.4)*, wenn gilt

$$\begin{aligned} & Q[v] \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{in } \Omega, \\ & v \leq g \quad (\geq g) \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ & \frac{\partial v}{\partial \nu} \leq h \quad (\geq h) \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Satz 2.1: (Vergleichssatz)
Es sei $Q = Q[u]$ elliptisch in $\Omega \cup \Gamma$. Ferner gelte $a_{jk} = a_{jk}(x, p)$ für $j, k = 1, \ldots, n$, d.h. die Koeffizienten a_{jk} sind unabhängig von z, und die Monotoniebedingung

$$b_z(x, z, p) \leq 0 \quad \textit{für alle } (x, z, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{2.6}$$

sei erfüllt. Sind dann $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Sublösung und $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Superlösung von (2.4), so folgt $u \leq v$ in $\overline{\Omega}$.

Beweis: Wir setzen $w := u - v$ und halten fest

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; Q[u] - Q[v] \;=\; & \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x, Du) w_{x^j x^k} + \sum_{j,k=1}^{n} \big[a_{jk}(x, Du) - a_{jk}(x, Dv)\big] v_{x^j x^k} \\ & + \big[b(x, u, Du) - b(x, u, Dv)\big] + \big[b(x, u, Dv) - b(x, v, Dv)\big] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nun beachten wir

$$\begin{aligned} a_{jk}(x, Du) - a_{jk}(x, Dv) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} a_{jk}(x, Dv + t\,Dw)\,dt \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left[\int_0^1 a_{jk,p^l}(x, Dv + t\,Dw)\,dt\right] w_{x^l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x, u, Du) - b(x, u, Dv) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} b(x, u, Dv + t\,Dw)\,dt \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left[\int_0^1 b_{p^l}(x, u, Dv + t\,Dw)\,dt\right] w_{x^l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x, u, Dv) - b(x, v, Dv) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} b(x, v + tw, Dv)\,dt \\ &= \left[\int_0^1 b_z(x, v + tw, Dv)\,dt\right] w. \end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_{jk}(x) &:= a_{jk}(x, Du(x)),\\
\hat{b}_l(x) &:= \sum_{j,k=1}^{n} \left[\int_0^1 a_{jk,p^l}(x, Dv + t\,Dw)\,dt \right] v_{x^j x^k}(x) + \int_0^1 b_{p^l}(x, u, Dv + t\,Dw)\,dt,\\
\hat{c}(x) &:= \int_0^1 b_z(x, v + tw, Dv)\,dt, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

so erhalten wir aus (2.7)

$$
\mathcal{L}w(x) := \sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(x) w_{x^j x^k}(x) + \sum_{l=1}^{n} \hat{b}_l(x) w_{x^l}(x) + \hat{c}(x) w(x) \geq 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2.8}
$$

und (2.5) entnehmen wir die Randbedingungen

$$
w \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{auf } \Gamma. \tag{2.9}
$$

Der lineare Operator $\mathcal{L} = \mathcal{L}w$ ist in $\Omega \cup \Gamma$ elliptisch und in jeder kompakten Teilmenge von $\Omega \cup \Gamma$ gleichmäßig elliptisch. Und wegen (2.6) gilt noch $\hat{c} \leq 0$ in Ω.

Sei nun $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$ gewählt. Wir zeigen, dass dann $w(x_0) \leq 0$ gilt und folglich $w = u - v \leq 0$ in Ω, wie behauptet.

Angenommen, es gilt $w(x_0) > 0$. Wegen (2.9) muss dann $x_0 \in \Omega \cup \Gamma$ richtig sein. Falls $x_0 \in \Gamma$ erfüllt ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $\mathcal{L} = \mathcal{L}w$ in $\Omega \cap B_r(x_0)$ gleichmäßig elliptisch ist. Nach Satz 1.3 (ii) ist dann $w = \text{const}$ in $\overline{\Omega \cap B_r(x_0)}$, wir können also o.B.d.A. $x_0 \in \Omega$ annehmen. Ist nun $d := \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ und $\Omega_\delta := \{x \in \Omega \,:\, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$ für $\delta < d$ gesetzt, so ist $\mathcal{L}$ in $\overline{\Omega_\delta} \subset \Omega$ gleichmäßig elliptisch und die Sublösung w nimmt ihr positives Maximum in $x_0 \in \Omega_\delta$ an. Nach Satz 1.2 (i) ist daher $w \equiv w(x_0) > 0$ in Ω_δ, was für $\delta \to 0$ einen Widerspruch zu $w \leq 0$ auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ liefert. Folglich war die Annahme $w(x_0) > 0$ falsch!

q.e.d.

Bemerkung: Die Aussage des Satzes wird i.A. falsch, wenn die Koeffizienten a_{jk} auch von z abhängen; vgl. [GT] 10.3.

Als erste Folgerung lesen wir direkt ab:

Satz 2.2: (Eindeutigkeit)
Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 besitzt das gemischte Randwertproblem (2.4) höchstens eine Lösung.

Als Beispiel betrachten wir eine Verallgemeinerung der Minimalflächengleichung, nämlich die *H-Flächengleichung*:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[u](x) \quad &:= \quad (1+u_{x^2}^2)u_{x^1x^1} - 2u_{x^1}u_{x^2}u_{x^1x^2} + (1+u_{x^1}^2)u_{x^2x^2} \\ &\qquad -2H(x,u)\big(1+|Du|^2\big)^{\frac{3}{2}} \quad = \quad 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2\end{aligned} \tag{2.10}$$

mit einer vorgegebenen Funktion $H = H(x,z) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Gleichung (2.10) beschreibt Graphen über Ω, die im Punkt $(x, u(x))$ die mittlere Krümmung $H(x, u(x))$ besitzen. Für $H \equiv 0$ ergibt sich wieder die Minimalflächengleichung. Offenbar ist $\mathcal{M}[u]$ quasilinear. Für die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$ der Matrix

$$(a_{jk})_{j,k=1,2} = (a_{jk}(p))_{j,k=1,2} = \begin{pmatrix} 1+p_2^2 & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & 1+p_1^2 \end{pmatrix}$$

berechnet man $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + |p|^2$. Also ist $\mathcal{M}[u]$ gemäß Definition 2.1 für jedes $u \in C^2(\Omega)$ gleichmäßig elliptisch in $\overline{\Omega}$ mit $m = 1$. Wenden wir nun Satz 2.2 speziell auf die H-Flächengleichung (2.10) an, so erhalten wir die

Folgerung 2.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Gamma \subsetneqq \partial\Omega$ wie oben. Zu vorgegebenen Daten $g \in C^0(\partial\Omega \setminus \Gamma)$, $h \in C^0(\Gamma)$ und $H = H(x,z) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ besitzt das gemischte Randwertproblem (2.4) für den H-Flächenoperator $\mathcal{Q} = \mathcal{M}$ aus (2.10) höchstens eine Lösung, falls H gemäß*

$$\frac{\partial}{\partial z}H(x,z) \geq 0 \quad \textit{für alle } (x,z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$$

monoton in z ist.

Wir nutzen nun den Vergleichssatz 2.1, um ein Maximumprinzip für quasilineare PDG abzuleiten, nämlich den folgenden

Satz 2.3: *Es sei $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}[u]$ gleichmäßig elliptisch in Ω mit Elliptizitätskonstante $m > 0$. Außerdem sei die Strukturbedingung*

$$b(x,z,p)\,sign(z) \leq \mu_1|p| + \mu_2 \quad \textit{in } \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

erfüllt mit nicht negativen Konstanten $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\mu_1, m, \Omega) \geq 0$, so dass jede Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von $\mathcal{Q}[u] \geq 0$ in Ω der Ungleichung

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C\mu_2 \quad \textit{für alle } x \in \Omega \tag{2.12}$$

genügt.

Beweis:

1. Zu der vorgegebenen Lösung $u = u(x)$ von $\mathcal{Q}[u] \geq 0$ setzen wir

$$\hat{a}_{jk}(x,p) := a_{jk}(x,u(x),p), \quad \hat{b}(x,p) := b(x,u(x),p), \quad (x,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n,$$

und betrachten

$$\hat{\mathcal{Q}}[v](x) := \sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(x,Dv)v_{x^j x^k} + \hat{b}(x,Dv) \quad \text{in } \Omega.$$

Offenbar ist dann auch $\hat{\mathcal{Q}}$ gleichmäßig elliptisch in Ω mit derselben Elliptizitätskonstante $m > 0$, und $\hat{b}$ erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{b} = 0 \quad \text{in } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n.$$

Wir setzen $\lambda := \frac{\mu_1 + 1}{m}$ und betrachten die Hilfsfunktion

$$v(x) := \max_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\mu_2}{\lambda}\big(e^{\lambda R} - e^{\lambda x^1}\big),$$

wobei $R = R(\Omega) > 0$ so gewählt ist, dass o.B.d.A. $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, 0 < x^1 < R\}$ gilt. Dann haben wir

$$v_{x^1} = -\mu_2 e^{\lambda x^1}, \quad v_{x^1 x^1} = -\lambda\mu_2 e^{\lambda x^1}$$

und alle anderen Ableitungen verschwinden. Folglich erhalten wir

$$\hat{\mathcal{Q}}[v](x) = -\lambda\mu_2 e^{\lambda x^1}\hat{a}_{11}(x,Dv) + \hat{b}(x,Dv) \quad \text{in } \Omega.$$

Nun ist $\hat{a}_{11}(x,p) \geq m$ richtig und daher

$$\hat{\mathcal{Q}}[v](x) \leq -\lambda\mu_2 m e^{\lambda x^1} + \hat{b}(x,Dp) = -(\mu_1+1)\mu_2 e^{\lambda x^1} + \hat{b}(x,Dv) \quad \text{in } \Omega. \tag{2.13}$$

Setzen wir wieder $\Omega^+ := \{x \in \Omega \,:\, u(x) > 0\}$, so liefert (2.11):

$$\hat{b}(x,Dv) = b(x,u,Dv)\mathrm{sign}(u) \leq \mu_1|Dv| + \mu_2 = \mu_1\mu_2 e^{\lambda x^1} + \mu_2 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Einsetzen in (2.13) ergibt

$$\hat{\mathcal{Q}}[v](x) \leq \big[-(\mu_1+1)\mu_2 + \mu_1\mu_2\big]e^{\lambda x^1} + \mu_2 \leq -\mu_2 + \mu_2 = 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

2. Nach Voraussetzung ist nun $\hat{\mathcal{Q}}[u] = \mathcal{Q}[u] \geq 0$ in Ω. Ferner bemerken wir

$$v(x) \geq u(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega,$$

also insbesondere auf $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$. Da schließlich $v \geq 0 = u$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$ gilt, können wir Satz 2.1 in Ω^+ anwenden mit $\Gamma = \emptyset$ und $g := u|_{\partial\Omega^+}$. Es folgt

$$v(x) \geq u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega^+$$

und wegen $v \geq 0 \geq u$ in $\Omega \setminus \Omega^+$ schließlich auch in Ω. Per Definition von v folgt

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\mu_2}{\lambda} e^{\lambda R} = \max_{\partial\Omega} u^+ + C\mu_2 \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

mit $C = C(\mu_1, m, \Omega) := \frac{m}{\mu_1+1} e^{\frac{\mu_1+1}{m}R}$. q.e.d.

Folgerung 2.2: (A-priori-Abschätzung)
Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3 haben wir für jede Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von $\mathcal{Q}[u] = 0$ in Ω die Abschätzung

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + C\mu_2 \quad \textit{für alle } x \in \Omega \tag{2.14}$$

mit der Konstanten $C = C(\mu_1, m, \Omega) \geq 0$ aus Satz 2.3.

Beweis: Man zeigt analog zu (2.12)

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u^- - C\mu_2 \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

und die Behauptung folgt. q.e.d.

Bemerkungen:

1. Man beachte, dass Satz 2.3 für den H-Flächenoperator $\mathcal{M}[u]$ aus (2.10) nur im Fall $H \equiv 0$ angewendet werden kann, also für den Minimalflächenfall. Dann ist $\mu_1 = \mu_2 = 0$ richtig und Folgerung 2.2 liefert

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

   für jede Lösung $u = u(x)$ der Minimalflächengleichung. Für $H \not\equiv 0$ kann eine (2.14) entsprechende Abschätzung mit einem einfachen Trick gewonnen werden, zumindest für geeignete strikt konvexe Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und hinreichend kleines H, d.h.

$$\sup_{(x,z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n} |H(x,z)| \leq h_0 < +\infty$$

   mit geeignetem $h_0 \geq 0$. Wir verweisen auf [S] Band 2, Kap. XII, § 9. Dort wird unter geeigneten Voraussetzungen an die Daten auch die Existenz einer Lösung des Dirichletproblems

$$\mathcal{M}[u] = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

bewiesen. Die dort dargestellte Methode funktioniert auch für das gemischte Randwertproblem (2.4) mit $\mathcal{Q} = \mathcal{M}$ und $h \equiv 0$, wieder unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen; siehe hierzu

F. Müller: *On stable surfaces of prescribed mean curvature with partially free boundaries.* Calc. Var. **24** (2005).

2. Satz 2.3 ist auch für lineare PDG interessant. Betrachten wir etwa das Problem

$$\Delta u + \kappa u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2.15}$$

mit einer Zahl $\kappa > 0$. Nach Folgerung 1.1 ist $u \equiv 0$ die einzige Lösung von (2.15) für $\kappa \leq 0$. Offenbar ist die PDG in (2.15) gleichmäßig elliptisch in Ω mit Elliptizitätskonstante $m = 1$, und für

$$b = b(x) := \kappa u(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

gilt

$$b(x)\mathrm{sign}(z) = \pm b(x) = \pm\kappa u(x) \leq \kappa \sup_{\Omega} |u| \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Damit ergibt sich mit $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \kappa \sup_\Omega |u|$ aus Folgerung 2.2:

$$|u(x)| \leq 0 + C(\Omega)\kappa \sup_{\Omega} |u| \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

bzw.

$$\sup_{\Omega} |u| \big[1 - C(\Omega)\kappa\big] \leq 0$$

mit $C(\Omega) = e^R$, wobei $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; 0 < x^1 < R\}$ gelte. Falls also

$$0 < \kappa < \frac{1}{C(\Omega)}$$

richtig ist, so muss $u \equiv 0$ in Ω erfüllt sein. Wir haben also eine Verallgemeinerung von Folgerung 1.1 für das Problem (2.14) auf positive $\kappa < C(\Omega)^{-1}$ gefunden. Man beachte, dass die obere Schranke $C(\Omega)^{-1} = e^{-R}$ keineswegs optimal ist.

Wir schließen den Paragraphen mit einer Verallgemeinerung von Satz 2.3 auf vollständig nichtlineare PDG:

Satz 2.4: *Es sei $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$\mathcal{F}[u](x) := F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Dabei sei $F = F(x,z,p,r) \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \cdot n})$ gleichmäßig elliptisch *in* Ω, *d.h.* $(F_{r_{jk}})_{j,k=1,\dots,n}$ *ist immer symmetrisch und es gilt für beliebige* $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\sum_{j,k=1}^{n} F_{r_{jk}}(x,z,p,r)\zeta_j\zeta_k \geq m|\zeta|^2 \quad \textit{für alle } (x,z,p,r) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \cdot n}$$

mit einer Elliptizitätskonstanten $m > 0$*. Ferner gelte die Strukturbedingung*

$$F(x,z,p,0)sign(z) \leq \mu_1|p| + \mu_2 \quad in\ \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

mit Konstanten $\mu_1, \mu_2 \geq 0$*. Dann folgt*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C\mu_2$$

mit einer Konstanten $C = C(\mu_1, m, \Omega) \geq 0$*.*

Beweis: Wir schreiben

$$\mathcal{F}[u](x) = F(x,u,Du,D^2u) - F(x,u,Du,0) + F(x,u,Du,0).$$

Setzen wir also

$$a_{jk}(x,z,p) := \int_0^1 F_{r_{jk}}(x,z,p,tD^2u(x))\,dt, \quad b(x,z,p) := F(x,z,p,0)$$

für $(x,z,p) \in \Omega_\delta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\Omega_\delta := \{x \in \Omega\ :\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \delta\}$, so genügt u in Ω_δ der Differentialungleichung

$$\mathcal{Q}[u](x) := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x,u(x),Du(x))u_{x^jx^k}(x) + b(x,u(x),Du(x) = \mathcal{F}[u](x) \geq 0.$$

Nun ist $\mathcal{Q}$ gleichmäßig elliptisch in Ω_δ mit der Elliptizitätskonstanten $m > 0$, und b erfüllt (2.11). Aus Satz 2.3 erhalten wir nun die Abschätzung

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega_\delta} u^+ + C\mu_2 \quad \text{in } \Omega_\delta.$$

Grenzübergang $\delta \to 0$ liefert die Behauptung. q.e.d.

Bemerkung: Natürlich können wir aus Satz 2.4 wieder eine zu (2.14) analoge a-priori-Abschätzung ableiten. Darüber hinaus gilt auch ein Vergleichssatz für vollständig nichtlineare Gleichungen, der sich ähnlich wie Satz 2.1 beweisen lässt.

Kapitel 3

Die Wärmeleitungsgleichung

1 Ein Existenzsatz

Wir schreiben $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ und betrachten die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\Delta_x u(x,t) = u_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei und $\Delta_x u := \sum_{k=1}^n u_{x^k x^k}$ den Laplaceoperator bez. $x \in \Omega$ bezeichnet. (1.1) ist die wichtigste parabolische Gleichung, die aber auch degeneriert elliptisch im Sinne von Definition 1.1 aus Kapitel 2 ist.

Wie bei der Laplacegleichung finden wir eine Lösung von (1.1) m.H. einer Art Grundlösung:

Definition 1.1: *Die Funktion*

$$K(x,y,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}_+,$$

nennen wir Kernfunktion der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkung: $K(x,y,t)$ ist singulär für $(x,t) \to (y,0)$.

Hilfssatz 1.1: (Eigenschaften der Kernfunktion)
Für die in Definition 1.1 erklärte Funktion $K = K(x,y,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ gilt:

(i) $(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t})K(x,y,t) = 0$ *für alle* $(x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

(ii) Für jedes $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ *gilt* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)\,dy = 1$.

(iii) Für beliebiges $\delta > 0$ haben wir

$$\int\limits_{y:|y-x|\geq\delta} K(x,y,t)\,dy \to 0 \ (t \to 0+)$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

(i) Wir berechnen

$$\begin{aligned} K_t &= \Big[-\frac{n}{2}\frac{4\pi}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{|x-y|^2}{4t^2}\Big]\exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big) \\ &= \Big(-\frac{n}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\Big)K, \\ K_{x^l} &= -\frac{x^l-y^l}{2t}K, \\ K_{x^lx^l} &= \Big[\Big(\frac{x^l-y^l}{2t}\Big)^2 - \frac{1}{2t}\Big]K, \end{aligned}$$

also insgesamt $(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t})K(x,y,t) = 0$.

(ii) Mit der Substitution $y = x + \sqrt{4t}\,\eta$, $dy = (4t)^{\frac{n}{2}}\,d\eta$ berechnen wir für beliebiges $\delta \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{|y-x|\geq\delta} K(x,y,t)\,dy &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{|y-x|\geq\delta}\exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big)\,dy \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{|\eta|\geq\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-|\eta|^2}\,d\eta, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Für $\delta = 0$ ergibt sich

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)\,dy = \pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\,d\eta = 1,$$

denn $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$.

(iii) Für $\delta > 0$ entnehmen wir (1.2):

$$\int\limits_{|y-x|\geq\delta} K(x,y,t)\,dy = \pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{|\eta|\geq\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-|\eta|^2}\,d\eta \to 0 \ (t \to 0+)$$

(man verwende Polarkoordinaten). Die Konvergenz ist offenbar gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^n$, da die rechte Seite nicht von x abhängt.

q.e.d.

Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ wollen wir nun das *Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned}
&u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)),\\
&\Delta_x u(x,t) = u_t(x,t) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,\\
&u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

mit einer vorgegebenen Funktion $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ lösen. Es gilt der

Satz 1.1: (Existenzsatz)
Zu gegebenem $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$u(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t) g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

Dann ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ eine Lösung des Anfangwertproblems (1.3), und es gilt

$$\inf_{\mathbb{R}^n} g \le u(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \textit{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty). \tag{1.5}$$

Eine Gleichheit tritt für ein $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ genau dann ein, wenn $g \equiv const$ richtig ist.

Beweis:

1. Zunächst ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ richtig, da $K = K(x,y,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ gilt und die Ableitungen von K bez. x und t für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [\delta,+\infty)$ gleichmäßig beschränkt bleiben. Wir können also in (1.4) Integration und Differentiation vertauschen. Damit folgt auch

   $$\Delta_x u - u_t = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Delta_x K - K_t) g\, dy = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,$$

   wobei wir noch Hilfssatz 1.1 (i) verwendet haben.

2. Wir zeigen die stetige Annahme der Anfangswerte. Zu beliebigem $\xi \in \mathbb{R}^n$ existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass gilt

   $$|g(y) - g(\xi)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \,:\, |y - \xi| \le 2\delta(\varepsilon).$$

   Wir setzen noch $M := \sup_{\mathbb{R}^n} |g| < +\infty$ und bestimmen aus Hilfssatz 1.1 (iii) ein $\vartheta(\varepsilon) > 0$, so dass

   $$\int\limits_{y:|y-x|\ge\delta(\varepsilon)} K(x,y,t)\, dy \le \varepsilon \quad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \vartheta(\varepsilon)]$$

erfüllt ist. Dann folgt für $|x-\xi| \le \delta(\varepsilon)$ und $0 < t \le \vartheta(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - f(\xi)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)\bigl[g(y) - g(\xi)\bigr]\, dy \right| \\
&\le \int\limits_{y:|y-x|\le\delta(\varepsilon)} K(x,y,t)|g(y) - g(\xi)|\, dy \\
&\quad + \int\limits_{y:|y-x|\ge\delta(\varepsilon)} K(x,y,t)|g(y) - g(\xi)|\, dy \\
&\le \varepsilon + 2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir noch Hilfssatz 1.1 (ii) ausgenutzt haben. Also erhalten wir

$$\lim_{(x,t)\to(\xi,0)} u(x,t) = g(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

3. Schließlich entnehmen wir Hilfssatz 1.1 (ii) noch die Abschätzung (1.5). Offenbar sind für $g \equiv \text{const}$ die Gleichheiten in (1.5) richtig. Falls umgekehrt z.B. $u(x,t) = \inf_{\mathbb{R}^n} g$ für ein $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ gilt, so folgt

$$0 = u(x,t) - \inf_{\mathbb{R}^n} g = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)\bigl[g(y) - \inf_{\mathbb{R}^n} g\bigr]\, dy,$$

also $g \equiv \inf_{\mathbb{R}^n} g$ wegen $K > 0$. q.e.d.

Bemerkungen:

1. Mit dem Ansatz (1.4) kann man auch Lösungen des Anfangswertproblems (1.3) für unbeschränkte Anfangswerte $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$|g(x)| \le Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

für Konstanten $A, a > 0$ konstruieren. Diese existiert dann aber nur für Zeiten $0 < t < \frac{1}{4a}$.

2. Wir zeigen im nächsten Paragraphen, dass (1.4) die einzige beschränkte Lösung von (1.3) in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ ist.

3. Für die Lösung des Anfangswertproblems (1.3) in $\Omega \times [0, +\infty)$ für ein geeignetes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verweisen wir auf [Jt] Kap. 4.

2 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Zu einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir den *parabolischen Zylinder*

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T],$$

mit beliebigem $T \in \mathbb{R}_+$. Wir setzen weiter

$$\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T.$$

Γ_T besteht also aus der Mantelfläche und der Grundfläche des Zylinders, enthält aber nicht die Deckelfläche $\Omega \times \{T\}$.

Satz 2.1: (Parabolisches Maximumprinzip)
Es sei $u = u(x,t) \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der Ungleichung $\Delta_x u - u_t \geq 0$ (bzw. ≤ 0) in Ω_T. Dann folgt

$$u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} u \quad (bzw. \ \geq \min_{\Gamma_T} u). \tag{2.1}$$

Beweis: Es genügt Lösungen von $\Delta_x u - u_t \geq 0$ zu betrachten. Setzen wir dann $v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$, so folgt

$$\mathcal{L}v := \Big(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}\Big)v = \Big(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}\Big)u + \varepsilon \geq \varepsilon > 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Da $\mathcal{L}$ ein reduzierter, degeneriert elliptischer Operator ist, können wir das schwache Maximumprinzip, Satz 1.1 (i) aus Kap. 2, anwenden und erhalten

$$v(x,t) \leq \max_{\partial\Omega_T} v \quad \text{für alle } (x,t) \in \Omega_T. \tag{2.2}$$

Angenommen, v nimmt in einem Punkt $(x_0, T) \in \partial\Omega_T \setminus \Gamma_T$ sein Maximum an, so wird auch $\tilde{v}(x) := v(x,T)$ in $x_0 \in \Omega$ maximal. Wir berechnen nun

$$\Delta\tilde{v}(x_0) = \Delta_x v(x_0, T) \geq v_t(x_0, T) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0,$$

da ja auch $\hat{v}(t) := v(x_0, t)$, $t \in (0, T]$ in $t = T$ maximal wird. Hilfssatz 1.1 aus Kap. 2 liefert nun einen Widerspruch! Also entnehmen wir (2.2)

$$u(x,t) - \varepsilon t = v(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} v \leq \max_{\Gamma_T} u,$$

also nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Behauptung (2.1). q.e.d.

Satz 2.2: (Eindeutigkeitssatz)
Sei $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} & u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T]), \\ & \Delta_x u - u_t = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ & u = g \quad \textit{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

höchstens eine Lösung in der Klasse von Funktionen, die der Wachstumsbedingung

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \textit{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] \tag{2.4}$$

genügen mit beliebigen Konstanten $A, a > 0$.

Beweis:

1. Sind u_1, u_2 Lösungen von (2.3), (2.4), so genügt $v := u_1 - u_2$ ebenfalls einer Abschätzung (2.4) und dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} & \Delta_x v - v_t = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ & v = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wir wollen zunächst annehmen, dass

$$4aT < 1 \tag{2.6}$$

richtig ist. Dann existiert $\delta > 0$, so dass auch noch gilt

$$4a(T + \delta) < 1. \tag{2.7}$$

Nun betrachten wir

$$w(x,t) := v(x,t) - \frac{\varepsilon}{(T+\delta-t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T+\delta-t)}\right\}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

mit beliebigen $\varepsilon > 0$. Wie in Hilfssatz 1.1 zeigt man, dass auch die subtrahierte Funktion der Wärmeleitungsgleichung genügt, also

$$\Delta_x w - w_t = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T]$$

richtig ist. Dann folgt nach dem Maximumprinzip, Satz 2.1, für jede Kugel $\Omega := B_R(0)$:

$$w(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} w \quad \text{für alle } (x,t) \in \Omega_T. \tag{2.8}$$

2. Wir untersuchen nun w auf dem parabolischen Rand Γ_T. Für $t = 0$ gilt

$$w(x,0) \leq v(x,0) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{2.9}$$

Falls hingegen $x \in \partial\Omega = \partial B_R(0)$ und $t \in [0,T]$ sind, so finden wir

$$\begin{aligned} w(x,t) &= v(x,t) - \frac{\varepsilon}{(T+\delta-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{R^2}{4(T+\delta-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\varepsilon}{(T+\delta-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{R^2}{4(T+\delta-t)}} \\ &\leq Ae^{aR^2} - \frac{\varepsilon}{(T+\delta)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{R^2}{4(T+\delta)}}, \end{aligned}$$

da die Funktion $f(s) := s^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{b}{s}}$, $s > 0$, für jedes $b > 0$ monoton wachsend ist. Beachten wir schließlich (2.7), d.h. $\frac{1}{4(T+\delta)} = a + \gamma$ mit einem $\gamma > 0$, so erhalten wir

$$w(x,t) \leq Ae^{aR^2} - \varepsilon[4(a+\gamma)]^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)R^2} \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T], \tag{2.10}$$

wenn wir $R > 0$ hinreichend groß wählen. Die Formeln (2.8)-(2.10) liefern nun $w(x,t) \leq 0$ in $\overline{\Omega_T}$ und nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ auch $v \leq 0$ bzw. $u_1 \leq u_2$ in $\overline{\Omega_T}$. Wenden wir die gleiche Argumentation auf $\tilde{u} := u_2 - u_1$ an, so folgt auch $u_2 \leq u_1$, also insgesamt $u_1 \equiv u_2$ in $\overline{\Omega_T}$. Schließlich war $R > 0$ hinreichend groß und ansonsten beliebig gewählt, so dass $u_1 \equiv u_2$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ folgt, immer vorausgesetzt (2.6) ist erfüllt.

3. Sei schließlich (2.6) nicht erfüllt. Dann wählen wir $m \in \mathbb{N}$ so, dass $4aT < m$ richtig ist. Damit gilt (2.6) für $\hat{T} := \frac{T}{m}$. Wir wenden nun die Argumentation von oben nacheinander in $[0,\hat{T}]$ auf $v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$, in $[\hat{T}, 2\hat{T}]$ auf $v(x,t) := u_1(x,t+\hat{T}) - u_2(x,t+\hat{T})$ usw. an und erhalten in m Schritten die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung: In der Klasse der beschränkten Lösungen existiert in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ nur eine Lösung, da dann $a = 0$ ist, also Bedingung (2.6) für alle $T > 0$ erfüllt ist. Wir können dann in Schritt 2) direkt zur Grenze $T \to \infty$ übergehen. In der durch (2.4) mit $a > 0$ charaktersisierten Lösungsklasse kann Eindeutigkeit nur für endliche $T > 0$ gezeigt werden.

Mit einer Energiemethode beweisen wir noch den

Satz 2.3: (Rückwertige Eindeutigkeit)
Zu einer gegebenen Funktion $h \in C^0(\partial\Omega \times [0,T])$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Gebiet, betrachten wir*

das Problem

$$\begin{aligned} \Delta_x u - u_t &= 0 \quad \textit{in } \Omega_T, \\ u &= h \quad \textit{auf } \partial\Omega \times [0,T]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sind nun $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega_T})$ zwei Lösungen von (2.11) mit der Eigenschaft

$$u_1 = u_2 \quad \textit{auf } \Omega \times \{T\}, \tag{2.12}$$

so folgt $u_1 \equiv u_2$ in $\overline{\Omega_T}$.

Bemerkung: Stimmen also zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit gleichen Randwerten auf der Deckelfläche von Ω_T überein, so stimmen sie bereits überall überein. Da die Wärmeleitungsgleichung nicht invariant unter Zeitumkehr ist (anders als etwa die Wellengleichung), ist dieses Ergebnis durchaus überraschend.

Beweis:

1. Wir betrachten die Differenzfunktion $v := u_1 - u_2 \in C^2(\overline{\Omega_T})$ und beachten

$$\begin{aligned} \Delta_x v - v_t &= 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wir setzen nun

$$e(t) := \int\limits_\Omega v(x,t)^2 \, dx, \quad t \in [0,T].$$

Dann folgt

$$\dot{e}(t) = 2 \int\limits_\Omega v_t v \, dx \overset{(2.13)}{=} 2 \int\limits_\Omega v \, \Delta_x v \, dx \quad \text{in } [0,T] \tag{2.14}$$

und mit dem Gaußschen Satz weiter

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= 2 \int\limits_\Omega \operatorname{div}(v \, D_x v) \, dx - 2 \int\limits_\Omega |D_x v|^2 \, dx \\ &= 2 \int\limits_\Omega v \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma - 2 \int\limits_\Omega |D_x v|^2 \, dx \\ &= -2 \int\limits_\Omega |D_x v(x,t)|^2 \, dx \quad \text{für alle } t \in [0,T], \end{aligned}$$

da $v = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,T]$ gilt. Nochmalige Differentiation liefert

$$\begin{aligned}
\ddot{e}(t) &= -4\int_\Omega D_x v \cdot \frac{\partial}{\partial t}(D_x v)\,dx \\
&= -4\int_\Omega \operatorname{div}(v_t\,D_x v)\,dx + 4\int_\Omega v_t\,\Delta_x v\,dx \\
&\overset{(2.13)}{=} -4\int_{\partial\Omega} v_t\frac{\partial v}{\partial\nu}\,d\sigma + 4\int_\Omega (\Delta_x v)^2\,dx.
\end{aligned}$$

Da nun mit $v = 0$ auch $\frac{\partial}{\partial t}v = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,T]$ gilt, erhalten wir schließlich

$$\ddot{e}(t) = 4\int_\Omega (\Delta_x v(x,t))^2\,dx \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{2.15}$$

Nun impliziert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung die Abschätzung

$$\left|\int_\Omega fg\,dx\right| \le \left(\int_\Omega f^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega g^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

für beliebige Funktionen $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$. Insbesondere erhalten wir aus (2.14) und (2.15):

$$\begin{aligned}
[\dot{e}(t)]^2 &= 4\left(\int_\Omega v\,\Delta_x v\,dx\right)^2 \\
&\le 4\left(\int_\Omega v^2\,dx\right)\left(\int_\Omega (\Delta_x v)^2\,dx\right) \\
&= e(t)\ddot{e}(t),
\end{aligned}$$

also

$$e(t)\ddot{e}(t) \ge [\dot{e}(t)]^2 \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{2.16}$$

2. Falls nun $e(t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$ gilt, so sind wir fertig. Gäbe es nämlich ein $(x_0,t_0) \in \Omega \times [0,T)$ mit $u_1(x_0,t_0) \neq u_2(x_0,t_0)$, so existiert ein $\varrho > 0$ mit $v = u_1 - u_2 \neq 0$ in $B_\varrho(x_0) \times \{t_0\}$ und folglich

$$0 = e(t_0) = \int_\Omega v(x,t_0)^2\,dx \ge \int_{B_\varrho(x_0)} v(x,t_0)^2\,dx > 0,$$

Widerspruch!

3. Sei also $e(t) \not\equiv 0$ in $[0,T]$. Da $e(T) = 0$ per Voraussetzung gilt, existiert dann ein Intervall $[t_1, t_2] \subset [0,T]$, so dass

$$e(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2), \quad e(t_2) = 0 \tag{2.17}$$

richtig ist. Setzen wir $f(t) := \ln e(t)$, $t \in [t_1, t_2)$, so liefert (2.16):

$$\ddot{f}(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{e}(t)}{e(t)}\right] = \frac{\ddot{e}(t)e(t) - \dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2).$$

Also ist f in $[t_1, t_2)$ konvex, d.h. für jedes $t \in (t_1, t_2)$ und alle $\tau \in [0,1]$ gilt

$$f\big((1-\tau)t_1 + \tau t\big) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t)$$

bzw.

$$\ln e\big((1-\tau)t_1 + \tau t\big) \leq (1-\tau)\ln e(t_1) + \tau \ln e(t) = \ln\left[e(t_1)^{1-\tau}e(t)^{\tau}\right]$$

und nach Exponenzieren und Grenzübergang $t \nearrow t_2$ schließlich

$$0 \leq e\big((1-\tau)t_1 + \tau t_2\big) \leq e(t_1)^{1-\tau}e(t_2)^{\tau} \quad \text{für alle } \tau \in [0,1].$$

Da aber nach (2.17) $e(t_2) = 0$ gilt, müsste $e(t) = 0$ für alle $t \in (t_1, t_2]$ folgen, im Widerspruch zu (2.17). Also muss doch $e \equiv 0$ in $[0,T]$ gelten.

q.e.d.

Kapitel 4

Die Wellengleichung

1 Das Cauchysche Anfangswertproblem für $n = 1$

Die *Wellengleichung*

$$\Delta_x u(x,t) - u_{tt}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soll nun betrachtet werden. Sei zunächst $\Omega = \mathbb{R}$, d.h. wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{1.2}$$

Auf der Suche nach einem geeigneten Ansatz beachten wir, dass der zugehörige *d'Alembert-Operator*

$$\mathcal{L} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

wie folgt geschrieben werden kann:

$$\mathcal{L} = \Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\Big).$$

Also liefert jede Lösung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\mathcal{L}^+\phi := \phi_x + \phi_t, \quad \mathcal{L}^-\psi := \psi_x - \psi_t \tag{1.3}$$

eine Lösung von (1.2). Die Gleichungen (1.3) werden *Transportgleichungen* genannt.

Eine Lösung ϕ bzw. ψ von (1.3) muss von der Form

$$\phi = \phi(x-t) \quad \text{bzw.} \quad \psi = \psi(x+t)$$

sein. Ist nämlich z.B. $\phi = \phi(x,t)$ eine Lösung im $\mathbb{R}^2$ von $\mathcal{L}^+\phi = 0$ und (x_0, s_0) beliebig, so gilt für $\hat{\phi}(s) := \phi(x_0+s, t_0+s)$:

$$\hat{\phi}'(s) = \phi_x(x_0+s, t_0+s) + \phi_t(x_0+s, t_0+s) = 0,$$

d.h. die Funktion ϕ ist auf jeder Gerade $(x_0 + s, t_0 + s)$, $s \in \mathbb{R}$, konstant. Also hängt ϕ nur vom Schnittpunkt $(x_0 - t_0, 0)$ dieser Gerade mit der x-Achse ab, ist also eine Funktion von $x - t$.

Nach obiger Zerlegung des d'Alembertoperators stellt nun für beliebige $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ die Funktion

$$u(x,t) := \phi(x-t) + \psi(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1.4}$$

eine Lösung der Wellengleichung (1.2) dar, und dies ist sogar die allgemeine Lösung: Führen wir nämlich neue Koordinaten

$$\xi := x + t, \quad \eta := x - t$$

ein und schreiben $v(\xi, \eta) := u(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2})$ für eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ der Wellengleichung, so folgt

$$v_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[\frac{1}{2}(u_x + u_t)\Big] = \frac{1}{4}\big(u_{xx} - u_{xt} + u_{tx} - u_{tt}\big) = 0.$$

Demnach ist $v_\xi(\xi, \eta) = \psi'(\xi)$, also eine von η unabhängige Funktion. Aufintegrieren liefert

$$v(\xi, \eta) = \int \psi'(\xi)\, d\xi + \phi(\eta) = \psi(\xi) + \phi(\eta)$$

und die Rücktransformation auf (x,t) ergibt gerade (1.4).

Wollen wir nun ein Anfangswertproblem in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ stellen, so legt (1.4) nahe, dass wir neben dem Funktionswert eine weitere Größe auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ vorschreiben müssen. Dies führt auf das *Cauchysche Anfangswertproblem*: Löse (1.4) unter Vorgabe von

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

mit geeigneten Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Der allgemeinen Lösung (1.4) entnehmen wir

$$\begin{aligned} &\phi(x) + \psi(x) = f(x), \\ &-\phi'(x) + \psi'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert

$$-\phi(x) + \psi(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi + c,$$

so dass schließlich folgt

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}\Big[f(x) - \int_0^x g(\xi)\, d\xi - c\Big], \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\Big[f(x) + \int_0^x g(\xi)\, d\xi + c\Big], \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen in (1.4) ergibt nun

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x-t) - f(x+t)\big] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(\xi)\,d\xi, \tag{1.6}$$

d.h. wir haben den

Satz 1.1: *Die eindeutige Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} &u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty)),\\ &u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\\ &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.7}$$

ist gegeben durch (1.6), wobei $f \in C^2(\mathbb{R})$ *und* $g \in C^1(\mathbb{R})$ *gelte.*

Bemerkung: Man beachte, dass u im Raumzeitpunkt $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ durch die Anfangsdaten im Intervall $I = [x-t, x+t]$ bestimmt ist. I nennt man das *Abhängigkeitsgebiet* der Lösung u, das Dreieck mit den Eckpunkten (x,t), $(x-t,0)$, $(x+t,0)$ heißt *charakteristisches Dreieck* für die Wellengleichung (1.2) und die von (x,t) ausgehenden Begrenzungslinien nennt man *Charakteristiken der Gleichung.*

2 Das Cauchysche Anfangswertproblem für $n = 3, 2$

Analog zu (1.7) betrachten wir das Cauchysche Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty),\\ &\Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,\\ &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei zunächst $n \in \mathbb{N}$ beliebig sei.

Wir erklären nun den *sphärischen Mittelwert*

$$M_f(x,r) := \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{|\xi|=1} f(x+r\xi)\,d\sigma(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

für eine beliebige Funktion $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Man beachte, dass

$$M_f(x,r) = M_f(x,-r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int\limits_{\partial B_{|r|}(x)} f(y)\,d\sigma(y) \tag{2.3}$$

für $r \neq 0$ richtig ist. Es gilt nun der

Hilfssatz 2.1: *Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ für $k \geq 2$ gegeben.*

(a) Dann folgt $M_f(x,r) \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und es gelten

$$M_f(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial r} M_f(x,0) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Die Darbouxsche Differentialgleichung *ist erfüllt:*

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) M_f(x,r) = \Delta_x M_f(x,r) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Beweis:

(a) Die Regularität von $M_f(x,r)$ folgt sofort aus der Definition, der wir auch direkt $M_f(x,0) = f(x)$ entnehmen. Und wegen (2.3) gilt auch $\frac{\partial}{\partial r} M_f(x,0) = 0$.

(b) Zunächst entnehmen wir (2.2) für $r > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_f(x,r) &= \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{|\xi|=1} \xi \cdot Df(x + r\xi)\, d\sigma(\xi) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} \frac{\partial}{\partial \nu} f(y)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{B_r(x)} \Delta f(y)\, dy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Zur Berechnung der zweiten r-Ableitung beachten wir

$$\frac{\partial}{\partial r}\Bigg[\int\limits_{B_r(x)} \Delta f(y)\, dy\Bigg] = \frac{\partial}{\partial r}\Bigg[\int\limits_0^r \Bigg(\int\limits_{\partial B_\varrho(x)} \Delta f(y)\, d\sigma(y)\Bigg) d\varrho\Bigg] = \int\limits_{\partial B_r(x)} \Delta f(y)\, d\sigma(y) \tag{2.5}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_r(x)} \Delta f(y)\, d\sigma(y) &= \int\limits_{\partial B_r(0)} \Delta_x f(x + \tilde{y})\, d\sigma(\tilde{y}) = \Delta_x \Bigg[\int\limits_{\partial B_r(0)} f(x + \tilde{y})\, d\sigma(\tilde{y})\Bigg] \\ &= \Delta_x \Bigg[\int\limits_{\partial B_r(x)} f(y)\, d\sigma(y)\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Insgesamt ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_f(x,r) &\overset{(2.4)}{=} -\frac{n-1}{\sigma_n r^n} \int\limits_{B_r(x)} \Delta f(y)\, dy + \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\Bigg[\int\limits_{B_r(x)} \Delta f(y)\, dy\Bigg] \\ &\overset{(2.5),(2.6)}{=} -\frac{n-1}{r}\Bigg[\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{B_r(x)} \Delta f(y)\, dy\Bigg] + \Delta_x \Bigg[\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} f(y)\, d\sigma(y)\Bigg] \\ &\overset{(2.3),(2.4)}{=} -\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} M_f(x,r) + \Delta_x M_f(x,r), \end{aligned}$$

also die Behauptung für $r > 0$. Für den Fall $r < 0$ beachten wir noch (2.3).

q.e.d.

Satz 2.1: (Kirchhoff)
Es seien $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gegeben. Dann ist die eindeutige Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems (2.1) für $n = 3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\big[tM_f(x,t)\big] + tM_g(x,t) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{\partial B_t(x)} \big[f(y) + Df(y)\cdot(y-x) + tg(y)\big]\, d\sigma(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Beweis:

1. Sei zunächst $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ eine beliebige Lösung von (2.1) für $n = 3$. Wir setzen dann

$$M_u(x,r;t) := \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t)\, d\sigma(\xi), \quad (x,r,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Die Darbouxsche Differentialgleichung und die Wellengleichung liefern nun:

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) M_u(x,r;t) = \Delta_x M_u(x,r;t) \\ &= \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \Delta_x \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, d\sigma(y) \overset{(2.6)}{=} \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} \Delta_y u(y,t)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(y,t)\, d\sigma(y) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r;t) \end{aligned}$$

für $r > 0$ und durch die Symmetrie $M_u(x,r;t) = M_u(x,-r;t)$ auch für $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Halten wir $x \in \mathbb{R}^3$ fest, so löst also $v(r,t) := M_u(x,r,t)$ die PDG

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r = v_{tt} \quad \text{in } (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^+. \tag{2.8}$$

Ferner hat $v(r,t)$ die Anfangsdaten

$$\begin{aligned} v(r,0) &= \tilde{f}(r) := M_f(x,r), \\ v_t(r,0) &= \tilde{g}(r) := M_g(x,r) \quad \text{für } r \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.9}$$

und nach Hilfssatz 2.1 (a) ist $\tilde{f} \in C^3(\mathbb{R})$, $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ richtig.

2. Wir betrachten nun $w(r,t) := rv(r,t)$ und finden

$$w_{rr} - w_{tt} = rv_{rr} + 2v_r - rv_{tt} \overset{n=3}{=} r\Big(v_{rr} + \frac{n-1}{r}v_r - v_{tt}\Big) \overset{(2.8)}{=} 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$$

sowie

$$w(r,0) = r\tilde{f}(r), \quad w_t(r,0) = r\tilde{g}(r), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Satz 1.1 liefert somit

$$w(r,t) = \frac{1}{2}\Big[(r-t)\tilde{f}(r-t) + (r+t)\tilde{f}(r+t)\Big] + \frac{1}{2}\int\limits_{r-t}^{r+t} \varrho\tilde{g}(\varrho)\,d\varrho.$$

Beachten wir schließlich $w(r,t) = rM_u(x,r,t)$ und die Symmetrieeigenschaft (2.3) von $\tilde{f} = M_f(x,\cdot)$ und $\tilde{g} = M_g(x,\cdot)$, so folgt

$$M_u(x,r;t) = \frac{1}{2r}\Big[(t+r)M_f(x,t+r) - (t-r)M_f(x,t-r)\Big] + \frac{1}{2r}\int\limits_{t-r}^{t+r} \varrho M_g(x,\varrho)\,d\varrho$$

für $(x,r,t) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Gehen wir nun zur Grenze $r \to 0$ über, so folgt mit Hilfssatz 2.1 (a):

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} M_u(x,r;t) = \frac{\partial}{\partial t}\big[tM_f(x,t)\big] + tM_g(x,t),$$

also die erste Identität in (2.7).

3. Um auch die zweite Identität in (2.7) einzusehen, berechnen wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1} f(x+t\xi)\,d\sigma(\xi)\Bigg] + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1} g(x+t\xi)\,d\sigma(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}\Big[f(x+t\xi) + tDf(x+t\xi)\cdot\xi + tg(x+t\xi)\Big]\,d\sigma(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_{\partial B_t(x)}\Big[f(y) + Df(y)\cdot(y-x) + tg(y)\Big]\,d\sigma(y), \end{aligned}$$

wie behauptet.

Umgekehrt rechnet man leicht nach, dass u aus (2.7) tatsächlich das Problem (2.1) für $n=3$ löst. q.e.d.

Für $n=2$ lässt sich die Gleichung (2.8) nicht einfach transformieren. Deshalb lösen wir (2.1) für $n=2$ mit der *Hadamardschen Abstiegsmethode*:

Satz 2.2: *Zu vorgegebenen Anfangsdaten $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ist die eindeutige Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems (2.1) für $n = 2$ gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{B_t(x)} \big\{ f(y) + Df(y) \cdot (y - x) + tg(y) \big\} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\, dy. \qquad (2.10)$$

Beweis: Löst $u = u(x^1, x^2, t) \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ das Problem (2.1) für $n = 2$, so genügt $\hat{u} = \hat{u}(x^1, x^2, x^3, t) := u(x^1, x^2, t)$ dem gleichen Problem für $n = 3$ zu den Anfangswerten

$$\hat{f}(x^1, x^2, x^3) := f(x^1, x^2), \quad \hat{g}(x^1, x^2, x^3) := g(x^1, x^2).$$

Also hat $\hat{u}$ die Darstellung (2.7) mit f, g ersetzt durch $\hat{f}, \hat{g}$. Werten wir diese insbesondere für $x^3 = 0$ aus und beachten die Unabhängigkeit der integrierten Funktionen von y^3, so können wir in (2.7) zweimal über die Halbsphäre $\{y \in \mathbb{R}^3 \ : \ |y - x| = t,\ y^3 > 0\}$ integrieren. Parametrisieren wir diese gemäß

$$y^3 = \psi(y^1, y^2) := \sqrt{t^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2}, \quad (y^1, y^2) \in B_t(x^1, x^2),$$

so erhalten wir für das Oberflächenelement:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \psi_{y^1}^2 + \psi_{y^2}^2}\, dy^1\, dy^2 = \Big(\frac{t^2}{t^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2} \Big)^{\frac{1}{2}} dy^1\, dy^2,$$

also $d\sigma = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\, dy$, $y = (y^1, y^2)$. Einsetzen in (2.7) liefert die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkungen:

1. Wenn man die Regularitätsvoraussetzungen an die Daten f, g im Anfangswertproblem (2.1) für $n = 1, 2, 3$ vergleicht, so fällt auf:

   - $n = 1 \ \rightarrow \ n = 2$: Sprung der Regularitätsforderung um 1 nach oben.
   - $n = 2 \ \rightarrow \ n = 3$: Kein Sprung der Regularitätsforderung.

   Dieses Phänomen ist für alle Dimensionen gültig:

   - n ungerade: $f, g \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$.
   - n gerade: $f, g \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

   Insbesondere haben wir also: Je höher die Dimension, um so glatter müssen die Daten sein. Für eine Behandlung der Wellengleichung in beliebigen Dimensionen verweisen wir auf [S] Kap. VI.

2. Für $n = 3$ hängt der Wert von u im Punkt (x, t) nur von den Anfangsdaten auf $\partial B_t(x) = \{y \ : \ |y - x| = t\}$ ab. Das ist das *Huygensche Prinzip.* Hingegen hängt die Lösung für $n = 2$ von den Daten auf der ganzen Kreisscheibe $\overline{B_t(x)}$ ab. Auch dieses Prinzip setzt sich in höheren Dimensionen fort.

3 Energieungleichung und Eindeutigkeit

Wie bereits bei der Wärmeleitungsgleichung können wir auch bei der Wellengleichung mit Energiemethoden argumentieren. Ist $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0+\infty) \tag{3.1}$$

und ist $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ beliebig fixiert, so setzen wir

$$e(t) := \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} \left\{ |D_x u(x,t)|^2 + u_t(x,t)^2 \right\} dx, \quad t \in [0,t_0], \tag{3.2}$$

für die *Energie von u zur Zeit $t \in [0,t_0]$*.

Satz 3.1: *Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ Lösung der Wellengleichung (3.1), so ist die Energie $e(t)$, $t \in [0,t_0]$, monoton fallend.*

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= 2 \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} \left\{ D_x u(x,t) \cdot D_x u_t(x,t) + u_t(x,t) u_{tt}(x,t) \right\} dx \\
&\quad - \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left\{ |D_x u(x,t)|^2 + u_t(x,t)^2 \right\} d\sigma(x) \\
&= 2 \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} \left\{ \operatorname{div}_x(u_t D_x u) - u_t(\Delta_x u - u_{tt}) \right\} dx - \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(|D_x u|^2 + u_t^2 \right) d\sigma \\
&\overset{(3.1)}{=} 2 \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2}\left(|D_x u|^2 + u_t^2 \right) \right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

Wegen $|\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t| \leq |D_x u|\,|u_t| \leq \frac{1}{2}(|D_x u|^2 + u_t^2)$ erhalten wir

$$\dot{e}(t) \leq 2 \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| - \frac{1}{2}\left(|D_x u|^2 + u_t^2 \right) \right\} d\sigma \leq 0 \quad \text{in } [0,t_0),$$

also die Behauptung. q.e.d.

Satz 3.2: (Eindeutigkeitssatz)
Zu beliebigen $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ hat das Cauchysche Anfangswertproblem (2.1) höchstens eine Lösung.

Beweis: Gibt es zwei Lösungen u_1, u_2 von (2.1), so genügt $v := u_1 - u_2 \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ dem homogenen Problem

$$\begin{aligned} \Delta_x v - v_{tt} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ v = v_t &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Ist nun $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ beliebig, so liefert Satz 3.1

$$0 \leq e(t) \leq e(0) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, t_0].$$

Also muss der nichtnegative Integrand die Gleichung

$$|D_x v(x,t)|^2 + v_t(x,t)^2 = 0 \quad \text{für alle } (x,t) \in K$$

erfüllen im Kegel $K := \{(x,t) \ : \ x \in \overline{B_{t_0 - t}(x_0)}, \ t \in [0, t_0)\}$. Das bedeutet aber $v \equiv \text{const}$ in K und, da v für $t = 0$ verschwindet, schließlich $v \equiv 0$ in K. Aus Stetigkeitsgründen folgt

$$u_1(x_0, t_0) - u_2(x_0, t_0) = v(x_0, t_0) = \lim_{K \ni (x,t) \to (x_0, t_0)} v(x,t) = 0$$

im beliebig gewählten Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. q.e.d.

Bemerkung: Satz 3.1 lässt sich auch anders interpretieren: Hat man Lösungen $u, \hat{u}$ von (2.1) zu Anfangsdaten f, g bzw. $\hat{f}, \hat{g}$ und stimmen f und $\hat{f}$ sowie g und $\hat{g}$ außerhalb einer Kugel $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ überein, so folgt $u \equiv \hat{u}$ im Kegel K mit der Spitze (x_0, t_0). Das heißt: Störungen der Anfangsdaten außerhalb von $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ haben keinen Einfluss auf u im Kegel K. Das Abhängigkeitsgebiet von u in (x_0, t_0) liegt also für beliebige Dimensionen in $\overline{B_{t_0}(x_0)}$; vgl. Paragraph 2.

Physikalische Interpretation: Störungen in positiver Entfernung erreichen uns erst nach positiver Zeit. Dies ist ein Unterschied zur Wärmeleitungsgleichung, denn die Anfangsdaten auf ganz $\mathbb{R}^n$ beeinflussen die Lösung $u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t) g(y)\, dy$ des Anfangswertproblems (1.3) aus Kap. 3 bereits zu beliebig kleiner Zeit. Das entspricht natürlich nicht der physikalischen Realität.

Kapitel 5

Schwache Lösungen partieller Differentialgleichungen

1 Das Dirichletsche Prinzip

Wir betrachten wieder das Dirichletproblem für die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x) &= h(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

auf der beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sei vorgegeben.

Satz 1.1: *Für die Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gelte $u = h$ auf $\partial\Omega$ und*

$$+\infty > \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \inf \left\{ \int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \;:\; v : \Omega \to \mathbb{R},\; v = h \textit{ auf } \partial\Omega \right\} \geq 0,$$

wobei wir hier und i.F. ∇ für den Gradienten schreiben. Dann löst u das Dirichletproblem (1.1).

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, so setzen wir

$$\alpha(t) := \int\limits_\Omega |\nabla(u + t\varphi)|^2 \, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da $u + t\varphi = u = h$ auf $\partial\Omega$ für beliebige $t \in \mathbb{R}$ richtig ist, wird $\alpha(t)$ für $t = 0$ minimal, d.h. $\dot\alpha(0) = 0$. Wegen

$$\alpha(t) = \int\limits_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla\varphi + t^2 |\nabla\varphi|^2 \right\} dx,$$

ist letzteres äquivalent zu

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Der Gaußsche Satz (Ω sei der Einfachheit halber immer Normalgebiet) liefert nun

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx &= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla u)\, dx - \int\limits_{\Omega} \varphi \Delta u\, dx \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma(x) - \int\limits_{\Omega} \varphi \Delta u\, dx, \end{aligned}$$

also wegen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi \Delta u\, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

Die Behauptung $\Delta u = 0$ in Ω ergibt sich nun aus (1.3) und dem folgenden Hilfssatz 1.1.

Hilfssatz 1.1: (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Gilt für ein $g \in C^0(\Omega)$ die Relation

$$\int\limits_{\Omega} g(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

so folgt $g \equiv 0$ in Ω.

Beweis: Sei in $x_0 \in \Omega$ o.B.d.A $g(x_0) > 0$. Dann existiert ein $r > 0$, so dass $g(x) \geq 0$ in $B_r(x_0)$ gilt. Ist nun $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0), [0, +\infty))$ mit $\varphi(x_0) > 0$ gewählt, so folgt

$$0 = \int\limits_{\Omega} g(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{B_r(x_0)} g(x)\varphi(x)\, dx,$$

also $g(x)\varphi(x) \equiv 0$ in $B_r(x_0)$, im Widerspruch zu $g(x_0)\varphi(x_0) > 0$. q.e.d.

Satz 1.1 legt nun das *Dirichletsche Prinzip* nahe:

Zur Lösung von (1.1) minimiere man das Dirichletintegral

$$\mathcal{D}(u) := \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx$$

in der Klasse von Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u = h$ auf $\partial\Omega$.

Aber: Nimmt $\mathcal{D}$ überhaupt ihr Infimum in dieser Klasse an? Und von welcher Klasse von Funktionen reden wir genau, was ist eine sinnvolle Wahl für die Regularitätseigenschaften der Vergleichsfunktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$? Es bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

- $v \in C^\infty(\Omega)$, da eine Lösung von (1.1) das erfüllt.
- $v \in C^2(\Omega)$, damit (1.1) sinnvoll ist.
- $v \in C^1(\Omega)$ mit $\mathcal{D}(u) < +\infty$, damit das Variationsproblem noch Sinn macht.

Auch die Regularitätsforderung bis zum Rand muss diskutiert werden. Jedoch zeigen Beispiele, dass ein Minimierer eines Variationsproblems z.B. in einer Klasse von C^1-Funktionen nicht einmal mehr stetig sein muss.

Ziel: Suche eine Klasse von Vergleichsfunktionen, für die das Variationsproblem in einem eventuell verallgemeinerten Sinn sinnvoll gestellt werden kann und die abgeschlossen unter der Infimumsbildung ist.

Erinnerung: Lebesgueräume L^p.

Für $p \in [0, +\infty)$ setzen wir

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ist messbar } : \ \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

und für $p = +\infty$ erklären wir

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ist messbar } : \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_\Omega |u| < +\infty \right\}$$

mit dem *wesentlichen Supremum* einer messbaren Funktion:

$$\sup_\Omega |u| := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| := \inf \Big\{ k \in \mathbb{R} \ : \ \{x \in \Omega \ : \ |u(x)| > k\} \text{ ist Nullmenge} \Big\}.$$

Dabei steht messbar für Lebesgue-messbar und Nullmenge für Lebesguesche Nullmenge. Und Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden identifiziert.

Satz 1.2:

(i) $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, ist bez. der angegebenen Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} =: \|\cdot\|_p$ ein normierter und vollständiger Vektorraum, d.h. ein Banachraum.

(ii) Insbesondere ist $L^2(\Omega)$ *ein* Hilbertraum*, also ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt*

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\,dx,$$

welcher bez. der induzierten Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{L^2(\Omega)}}$$

vollständig ist.

(iii) Es gilt die Höldersche Ungleichung*: Ist* $u \in L^p(\Omega)$*,* $v \in L^q(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, so ist* $uv \in L^1(\Omega)$ *und*

$$\int\limits_{\Omega} |uv|\,dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$$

ist erfüllt (verwende Youngsche Ungleichung: $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$*,* $a,b \ge 0$*).*

(iv) Für $p \in [1,+\infty)$ *liegt der Raum* $L^p(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$*, d.h. zu jedem* $u \in L^p(\Omega)$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $v \in L^p(\Omega) \cap C^0(\Omega)$*, so dass* $\|u-v\|_p \le \varepsilon$ *richtig ist.*

Beweis: Siehe z.B. [S] Kap. II, §§ 6,7.

Wir kehren nun zum Dirichletschen Prinzip zurück und beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz 1.2: *Das Dirichletintegral* $\mathcal{D}$ *ist konvex, d.h. es gilt*

$$\mathcal{D}(tu + (1-t)v) \le t\mathcal{D}(u) + (1-t)\mathcal{D}(v)$$

für alle u, v *mit* $\mathcal{D}(u), \mathcal{D}(v) < +\infty$ *und alle* $t \in [0,1]$*.*

Beweis: Wegen der Konvexität der Funktion $\mathbb{R}^n \ni w \mapsto |w|^2 \in \mathbb{R}$ folgt

$$|t\nabla u + (1-t)\nabla v|^2 \le t|\nabla u|^2 + (1-t)|\nabla v|^2 \quad \text{für alle } t \in [0,1],$$

also sofort die Behauptung. q.e.d.

Wir betrachten nun eine *Minimalfolge* $\{u_k\}_k$ von $\mathcal{D}$ mit $u_k = h$ auf $\partial\Omega$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}(u_k) = \inf\big\{\mathcal{D}(v) \;:\; v : \Omega \to \mathbb{R},\; v = h \text{ auf } \partial\Omega\big\} = d < +\infty.$$

Satz 1.3: *Ist $\{u_k\}_k$ eine Minimalfolge für $\mathcal{D}$, so bildet $\{\nabla u_k\}_k$ eine Cauchyfolge bez. der $L^2(\Omega)$-Topologie, d.h.*

$$\|\nabla u_k - \nabla u_l\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \ (k, l \to \infty).$$

Bemerkung: Dabei setzt man für die L^p-Norm einer vektorwertigen Funktion $v = (v^1, \dots, v^N) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$, d.h. $v^k \in L^p(\Omega)$ für $k = 1, \dots, N$:

$$\|v\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)} := \Big(\sum_{k=1}^N \|v^k\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [0, +\infty).$$

Beweis von Satz 1.3: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(u_k - u_l) &= \int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u_l|^2 \, dx \ = \int_\Omega \big(|\nabla u_k|^2 - 2\nabla u_k \cdot \nabla u_l + |\nabla u_l|^2\big) \, dx \\
&= 2\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx + 2\int_\Omega |\nabla u_l|^2 \, dx - 4\int_\Omega \Big|\nabla\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big)\Big|^2 \, dx \\
&= 2\mathcal{D}(u_k) + 2\mathcal{D}(u_l) - 4\mathcal{D}\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Hilfssatz 1.2 liefert also

$$d \leq \mathcal{D}\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big) \overset{(1.4)}{\leq} \frac{1}{2}\big[\mathcal{D}(u_k) + \mathcal{D}(u_l)\big] \to d,$$

d.h. $\mathcal{D}(\frac{u_k+u_l}{2}) \to d \, (k, l \to +\infty)$ und daher wieder aus (1.4):

$$\mathcal{D}(u_k - u_l) = \int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u_l|^2 \, dx \to 2d + 2d - 4d = 0 \ (k, l \to +\infty),$$

wie behauptet. q.e.d.

Da nun $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ vollständig ist, existiert ein $w \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so dass $\|\nabla u_k \to w\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \, (k \to +\infty)$ und insbesondere $d = \|w\|^2_{L^2(\Omega)}$ richtig ist. Um also eine Lösung des betrachteten Variationsproblems $\mathcal{D}(u) \to \min$ zu erhalten, muss die Frage beantwortet werden, ob ein u existiert mit $u = h$ auf $\partial\Omega$ und $\nabla u = w$ in Ω. Und zweitens: Welche Regularitätseigenschaften besitzt ein solches u? Unsere Überlegungen zusammenfassend haben wir also folgenden Plan:

1. Suche einen Minimierer $u : \Omega \to \mathbb{R}$ von $\mathcal{D}$ in der Klasse der Funktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $v = h$ auf $\partial\Omega$ (in geeignetem Sinne) und mit $\nabla v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

2. Weise Regularität von u nach. Grundlegend dafür ist die auch jetzt noch gültige Relation (1.2) für den Minimierer u.

2 Der Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$

Definition 2.1: *Ist $u \in L^1(\Omega)$ und existiert ein $v \in L^1(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega v\varphi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^1(\Omega), \tag{2.1}$$

so heißt $v =: D_i u$ die schwache Ableitung *von u* in Richtung *x^i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. u heißt* schwach differenzierbar*, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ die schwache Ableitung $D_i u$ existiert. Dann schreiben wir $Du := (D_1 u, \ldots, D_n u)$ für den* schwachen Gradienten *von u.*

Bemerkung: Jedes $u \in C^1(\Omega)$ ist schwach differenzierbar mit $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$. (Natürlich muss $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ nicht in $L^1(\Omega)$ liegen, aber sicher in $L^1(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$.)

Wir betrachten nun Glättungsfunktionen, d.h. Funktionen $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varrho(x) \begin{cases} \geq 0, & \text{für } x \in B_1(0) \\ = 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) \end{cases}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) \, dx = 1. \tag{2.2}$$

Typisches Beispiel ist die Funktion

$$\varrho(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $c > 0$ eine geeignete Normierungskonstante ist, mit der (2.2) erfüllt sei. Wir betrachten $u \in L^1(\Omega)$ und denken uns u immer gemäß $u(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Dann definieren wir nach K. O. Friedrichs für $h > 0$ die geglättete Funktion (*Friedrich's mollifier*)

$$u_h(x) := \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho\Big(\frac{x-y}{h}\Big) u(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Offenbar ist $u_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $h > 0$ richtig. Es gilt nun der

Hilfssatz 2.1: *Es sei $u \in L^1(\Omega)$ und $v = D_i u \in L^1(\Omega)$ existiere. Dann gilt*

$$D_i(u_h(x)) = (D_i u)_h(x) \quad \textit{für alle } h < \textit{dist}(x, \partial\Omega), \ x \in \Omega.$$

Beweis: Wir differenzieren unter dem Integralzeichen und erhalten

$$\begin{aligned} D_i(u_h(x)) &= \frac{1}{h^n}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}\varrho\Big(\frac{x-y}{h}\Big)u(y)\,dy \;=\; -\frac{1}{h^n}\int\limits_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial y^i}\varrho\Big(\frac{x-y}{h}\Big)\Big]u(y)\,dy \\ &\overset{(2.1)}{=} \frac{1}{h^n}\int\limits_\Omega \varrho\Big(\frac{x-y}{h}\Big)D_i u(y)\,dy \;=\; (D_i u)_h(x), \end{aligned}$$

wie behauptet. q.e.d.

Wichtig ist nun die folgende Approximationseigenschaft der Glättungsfunktionen:

Hilfssatz 2.2:

(a) Ist $u \in C^0(\Omega)$ so konvergiert $u_h \to u\,(h \to 0)$ kompakt gleichmäßig, d.h. für beliebiges $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt

$$\sup_{\Omega'} |u - u_h| \to 0 \;\; (h \to 0).$$

(b) Für $u \in L^p(\Omega)$ mit $p \in [1, +\infty)$ haben wir

$$\|u - u_h\|_p \to 0 \;\; (h \to 0).$$

Beweis:

(a) Zunächst beachten wir

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n}\int\limits_{B_h(x)} \varrho\Big(\frac{x-y}{h}\Big)u(y)\,dy = \int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)u(x-hz)\,dz, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

(zur Erinnerung: $u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$). Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) =: d > 0$. Dann ist u in $\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(\Omega', x) < \frac{d}{2}\} \subset\subset \Omega$ gleichmäßig stetig, d.h. insbesondere für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) \in (0, \frac{d}{2}]$, so dass

$$|u(x) - u(y)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega', y \in \Omega : |x - y| \le \delta(\varepsilon)$$

richtig ist. Somit folgt für $0 < h \le \delta(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} |u_h(x) - u(x)| &= \Big|\int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)\big[u(x-hz) - u(x)\big]\,dz\Big| \\ &\le \int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)\big|u(x-hz) - u(x)\big|\,dz \;\le\; \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega', \end{aligned}$$

also die Behauptung.

(b) Sei nun $u \in L^p(\Omega)$ und $q = \frac{p}{p-1}$, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (beachte $q = +\infty$ für $p = 1$). Dann können wir schreiben

$$|\varrho(z)u(x-hz)| = \varrho(z)^{\frac{1}{q}}\left[\varrho(z)|u(x-hz)|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Die Hölderungleichung, Satz 1.2 (iii), und Formel (2.3) liefern somit

$$\begin{aligned} |u_h(x)| &\le \int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)^{\frac{1}{q}}\left[\varrho(z)|u(x-hz)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\,dz \\ &\le \Bigg(\int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)\,dz\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)|u(x-hz)|^p\,dz\Bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Bigg(\int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)|u(x-hz)|^p\,dz\Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Für beliebiges, beschränktes $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ist nun auch $u, u_h \in L^p(\hat{\Omega})$ richtig. Integration der letzten Ungleichung über $\hat{\Omega} \supset \Omega$ ergibt daher

$$\begin{aligned} \int\limits_{\hat{\Omega}} |u_h(x)|^p\,dx &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)|u(x-hz)|^p\,dz\Bigg)dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x-hz)|^p\,dx\Bigg)dz \\ &\overset{y=x-hz}{=} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^p\,dy\Bigg)\Bigg(\int\limits_{B_1(0)} \varrho(z)\,dz\Bigg) = \int\limits_{\hat{\Omega}} |u(y)|^p\,dy, \end{aligned}$$

also

$$\|u_h\|_{L^p(\hat{\Omega})} \le \|u\|_{L^p(\hat{\Omega})}. \tag{2.4}$$

Sei insbesondere $\hat{\Omega} \supset\supset \Omega$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 1.2 (iv) existiert dann ein $w \in C^0(\hat{\Omega}) \cap L^p(\hat{\Omega})$ mit $\|u - w\|_{L^p(\hat{\Omega})} \le \varepsilon$. Wenden wir (2.4) auf $u - w \in L^p(\hat{\Omega})$ an, so folgt

$$\|u_h - w_h\|_{L^p(\hat{\Omega})} = \|(u-w)_h\|_{L^p(\hat{\Omega})} \le \|u - w\|_{L^p(\hat{\Omega})} \le \varepsilon.$$

Nach Teil (a) können wir nun $h > 0$ so klein wählen, dass $\|w - w_h\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$ ausfällt ($\Omega \subset\subset \hat{\Omega}$!), so dass insgesamt folgt

$$\|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} \le \|u - w\|_{L^p(\Omega)} + \|w - w_h\|_{L^p(\Omega)} + \|w_h - u_h\|_{L^p(\Omega)} \le 3\varepsilon,$$

wie behauptet. q.e.d.

Es folgt nun unmittelbar der zentrale

Satz 2.1: *Sind $u, v \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, so gilt $v = D_i u$ genau dann, wenn es eine Folge $\{u^{(k)}\}_k \subset C^\infty(\Omega)$ so gibt, dass*

$$\|u^{(k)} - u\|_p, \left\| \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} - v \right\|_p \to 0 \ (k \to \infty) \tag{2.5}$$

richtig ist.

Beweis:

„⇒“: Sei $v = D_i u$. Dann setzen wir

$$u^{(k)}(x) := u_{\frac{1}{k}}(x) = k^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho\big(k(x-y)\big) u(y)\, dy \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Nach Hilfssatz 2.2 (b) ist dann $\|u^{(k)} - u\|_p \to 0 \, (k \to \infty)$ richtig. Und nach Hilfssatz 2.1 gilt $\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} = (D_i u)_{\frac{1}{k}} = v_{\frac{1}{k}}$, also wiederum nach Hilfssatz 2.2 (b):

$$\left\| \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} - v \right\|_p = \|v^{(k)} - v\|_p \to 0 \ (k \to \infty).$$

„⇐“: Es gäbe nun $\{u^{(k)}\}_k \subset C^\infty(\Omega)$ mit der Eigenschaft (2.5). Für beliebiges $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ gilt dann zunächst

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \Big(v\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Big) dx &= \int\limits_\Omega \Big\{ \Big(v - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} \Big) \varphi + (u - u^{(k)}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Big\} dx \\
&\quad + \int\limits_\Omega \Big(\varphi \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} + u^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Big) dx \\
&= \int\limits_\Omega \Big\{ \Big(v - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} \Big) \varphi + (u - u^{(k)}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Big\} dx
\end{aligned}$$

nach dem Gaußschen Satz. Die Hölderungleichung liefert also mit $q := \frac{p}{p-1}$:

$$\left| \int\limits_\Omega \Big(v\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Big) dx \right| \le \left\| \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} - v \right\|_p \|\varphi\|_q + \|u - u^{(k)}\|_p \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\|_q \to 0 \ (k \to \infty),$$

d.h. $\int_\Omega (v\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x^i})\, dx = 0$, wie behauptet. q.e.d.

Definition 2.2:

(a) *Der* Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, *ist definiert als die Menge aller Funktionen* $u \in L^p(\Omega)$, *deren (erste) schwache Ableitungen* $D_i u$, $i = 1, \ldots, n$, *existieren und selbst aus* $L^p(\Omega)$ *sind. Auf* $W^{1,p}(\Omega)$ *erklären wir die* $W^{1,p}(\Omega)$-Norm

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |D_i u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \in [1, +\infty)$ *und*

$$\|u\|_{1,+\infty} := \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} \big(|u(x)| + |Du(x)| \big).$$

(b) *Der Raum* $H^{1,p}(\Omega)$ *ist der Abschluss von* $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *bez. der* $W^{1,p}(\Omega)$-*Norm. Wir schreiben außerdem* $H_0^{1,p}(\Omega)$ *für den Abschluss von* $C_0^\infty(\Omega)$ *bez. dieser Norm.*

Bemerkungen:

1. Dass $\|\cdot\|_{k,p}$ eine Norm ist, ist klar. Wir zeigen gleich, dass $W^{1,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist.

2. Für $p = 2$ erhalten wir den Hilbertraum $W^{1,2}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} := \int\limits_\Omega uv \, dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega D_i u \, D_i v \, dx$$

und der induzierten Norm

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{W^{1,2}(\Omega)}}.$$

3. Der Abschluss $H^{1,p}(\Omega)$ bzw. $H_0^{1,p}(\Omega)$ ist wie bei der Konstruktion der reellen Zahlen zu verstehen: Als Äquivalenzklassenbildung von Cauchyfolgen in $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ bzw. $C_0^\infty(\Omega)$, deren Differenz Nullfolgen bilden; siehe [S] Kap. VII, § 4 für allgemeine Hilberträume.

Satz 2.2:

(a) $W^{1,p}(\Omega)$ *ist vollständig bez.* $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, *d.h.* $W^{1,p}(\Omega)$ *ist ein Banachraum.*

(b) *Es gilt* $W^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega)$ *für* $p \in [1, +\infty)$.

Beweis:

(a) Nur für $p \in [1, +\infty)$: Sei $\{u^{(k)}\}_k \subset W^{1,p}(\Omega)$ Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann sind $\{u^{(k)}\}_k, \{D_i u^{(k)}\}$, $i = 1, \dots, n$, Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$, und da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existieren $u, v_i \in L^p(\Omega)$ mit

$$\|u - u^{(k)}\|_p,\ \|v_i - D_i u^{(k)}\|_p \to 0\ (k \to \infty) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Für beliebiges $\varphi \in L^q(\Omega)$ ist also nach der Hölderungleichung

$$\left| \int\limits_\Omega (u - u^{(k)})\varphi \, dx \right|, \left| \int\limits_\Omega (v_i - D_i u^{(k)})\varphi \, dx \right| \to 0\ (k \to \infty)$$

richtig und insbesondere für $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_\Omega \left(v_i \varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) dx \right| \\ &\qquad \leq \left| \int\limits_\Omega (v_i - D_i u^{(k)})\varphi \, dx \right| + \left| \int\limits_\Omega \left[(D_i u^{(k)})\varphi + u^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] dx \right| \\ &\qquad\quad + \left| \int\limits_\Omega (u - u^{(k)}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \, dx \right| \to 0\ (k \to \infty). \end{aligned}$$

Also ist $v_i = D_i u$ für $i = 1, \dots, n$ richtig und daher $u \in W^{1,p}(\Omega)$, wie behauptet.

(b) Dies ist gerade die Aussage von Satz 2.1, wenn wir die Elemente $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit der Äquivalenzklasse der dort konstruierten Folgen $\{u^{(k)}\}_k \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u - u^{(k)}\|_{1,p} \to 0\,(k \to \infty)$ identifizieren.

q.e.d.

Bemerkungen:

1. Insbesondere ist also $H_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum, nämlich der sogenannte *Raum mit schwachen Nullrandwerten*. Man kann zeigen: Ist $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$, so folgt $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

2. Wir halten noch drei wichtige Eigenschaften von Sobolevfunktionen fest. Für die Beweise und weitergehende Untersuchungen verweisen wir auf [S] Kap. X und [Jt] Kap. 8:

   (a) Ist $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ beliebig, $u \in W^{1,p}(\Omega_0)$, $v \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u - v \in H_0^{1,p}(\Omega)$, so ist auch

   $$w(x) := \begin{cases} u(x), & \text{für } x \in \Omega_0 \\ v(x), & \text{für } x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases} \in W^{1,p}(\Omega)$$

richtig mit

$$D_i w(x) = \begin{cases} D_i u(x), & \text{für } x \in \Omega_0 \\ D_i v(x), & \text{für } x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases}.$$

Insbesondere sind also mit $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ auch $\min\{u,v\}$, $\max\{u,v\}$, u^+, u^-, $|u|$, ... aus $W^{1,p}(\Omega)$.

(b) *Kettenregel:* Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\sup_{\mathbb{R}} |f'| < +\infty$. Dann ist auch $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ erfüllt mit

$$D_i(f \circ u) = f'(u) D_i u.$$

(c) *Produktregel:* Mit $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ist auch $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ richtig und es gilt

$$D_i(uv) = u\, D_i v + v\, D_i u.$$

Wir schließen den Paragraphen mit dem berühmten

Satz 2.3: (Poincarésche Ungleichung)
Für beliebiges $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}} \|Du\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei $|\Omega| := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega \, dx$ das Lebesguesche Maß von Ω ist und $\omega_n = \frac{\sigma_n}{n}$ den Inhalt der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ angibt.

Bemerkung: Der Satz gilt nicht für beliebige $u \in W^{1,2}(\Omega) = H^{1,2}(\Omega)$, wie etwa $u \equiv \text{const} \neq 0$ zeigt.

Zum Beweis von Satz 2.3 benötigen wir noch den folgenden

Hilfssatz 2.3: *Sei $\mu \in (0,1]$ beliebig und setzen wir*

$$(V_\mu f)(x) := \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)\, dy, \quad f \in L^2(\Omega),$$

so gilt

$$\|V_\mu f\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\mu} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis: Wir setzen $R := (\frac{|\Omega|}{\omega_n})^{\frac{1}{n}}$. Dann gilt $|B_R(x)| = \omega_n R^n = |\Omega|$ und

$$|\Omega \setminus (\Omega \cap B_R(x))| = |B_R(x) \setminus (\Omega \cap B_R(x))|$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$. Wegen $n(\mu - 1) \leq 0$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy &= \int\limits_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy + \int\limits_{\Omega\setminus(\Omega\cap B_R(x))} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy \\
&\leq \int\limits_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy + \int\limits_{\Omega\setminus(\Omega\cap B_R(x))} R^{n(\mu-1)}\,dy \\
&= \int\limits_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy + \int\limits_{B_R(x)\setminus(\Omega\cap B_R(x))} R^{n(\mu-1)}\,dy \\
&\leq \int\limits_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy + \int\limits_{B_R(x)\setminus(\Omega\cap B_R(x))} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy \\
&= \int\limits_{B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy = \int_0^R \Big(\int\limits_{S^{n-1}} d\sigma\Big) r^{n(\mu-1)} r^{n-1}\,dr \\
&= \frac{\sigma_n}{n\mu} R^{n\mu} = \frac{1}{\mu}\omega_n R^{n\mu} = \frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu.
\end{aligned}$$

Andererseits liefert die Hölderungleichung mit $p = q = 2$:

$$\begin{aligned}
|(V_\mu f)(x)| &\leq \int\limits_{\Omega} |x-y|^{\frac{n}{2}(\mu-1)} |x-y|^{\frac{n}{2}(\mu-1)} |f(y)|\,dy \\
&\leq \Big(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{n(\mu-1)} |f(y)|^2\,dy\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |(V_\mu f)(x)|^2\,dx &\leq \int\limits_{\Omega} \Big\{\Big(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dy\Big)\Big(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{n(\mu-1)} |f(y)|^2\,dy\Big)\Big\}\,dx \\
&\leq \frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{n(\mu-1)}\,dx\Big)|f(y)|^2\,dy \\
&\leq \Big(\frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu\Big)^2 \int\limits_{\Omega} |f(y)|^2\,dy,
\end{aligned}$$

also die Behauptung. q.e.d.

Beweis von Satz 2.3: Zunächst sei $u \in C_0^1(\Omega)$. Setzen wir u zu 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort, so liefert der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung für beliebige $x \in \Omega$ und beliebige $\xi \in S^{n-1}$:

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} u(x + r\xi)\, dr.$$

Integrieren wir dies über $\xi \in S^{n-1}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sigma_n u(x) \quad &= \quad -\int_0^\infty \Bigg(\int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(x + r\xi)\, d\sigma(\xi) \Bigg)\, dr \\
&\overset{y=x+r\xi}{=} \quad -\int_0^\infty \Bigg(\int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) \Bigg)\, dr \\
&= \quad -\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}} Du(y) \cdot \frac{y-x}{|y-x|}\, dy
\end{aligned}$$

und daher

$$|u(x)| \le \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |Du(y)|\, dy = \frac{1}{n\omega_n} V_{\frac{1}{n}}(|Du|)(x).$$

Hilfssatz 2.3 liefert also

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{n\omega_n} n\omega_n^{1-\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|Du\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}} \|Du\|_{L^2(\Omega)},$$

d.h. die Behauptung für $u \in C_0^1(\Omega)$.

Ist nun $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, so können wir u durch $\{u_k\}_k \subset C_0^\infty(\Omega)$ in der $W^{1,2}(\Omega)$-Norm approximieren. Insbesondere gilt also $\|u - u_k\|_{L^2(\Omega)}, \|Du - Du_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$, was den Beweis der behaupteten Ungleichung auch für $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ liefert.

q.e.d.

3 Schwache Lösungen der Poissongleichung

Wir wenden nun das Gelernte auf das Dirichletproblem an, wobei wir jetzt etwas allgemeiner die Poissongleichung betrachten: Wir suchen also eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\
u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Hierbei seien $f \in L^2(\Omega)$ und $h \in W^{1,2}(\Omega)$ gegeben. Wir minimieren das Integral

$$\mathcal{E}(v) := \int_\Omega \big\{ |Dv|^2 + fv \big\}\, dx, \quad v \in \mathcal{K},$$

in der Klasse

$$\mathcal{K} := \{v \in W^{1,2}(\Omega) \,:\, v - h \in H_0^{1,2}(\Omega)\},$$

d.h. in der Klasse der Sobolevfunktionen, die die Randwerte h im schwachen Sinne annehmen. Wir suchen also $u \in \mathcal{K}$ mit

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{v\in\mathcal{K}} \mathcal{E}(v) =: e.$$

Satz 3.1: *Zu beliebig vorgegebenen $f \in L^2(\Omega)$ und $h \in W^{1,2}(\Omega)$ existiert ein Minimierer $u \in \mathcal{K}$ von $\mathcal{E}$. Für diesen gilt*

$$\int_\Omega \{Du \cdot D\varphi + f\varphi\}\,dx = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.2}$$

Definition 3.1: *Eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von (3.2) zu vorgegebenem $f \in L^2(\Omega)$ nennen wir* schwache Lösung der Poissongleichung $\Delta u = f$ *in Ω. Ist zusätzlich $u - h \in H_0^{1,2}(\Omega)$ zu vorgegebenem $h \in W^{1,2}(\Omega)$, so heißt u* schwache Lösung des Dirichletproblems (3.1)*.*

Beweis von Satz 3.1:

1. Zunächst müssen wir prüfen, ob $\mathcal{E}(v)$ nach unten beschränkt ist in $\mathcal{K}$. Dazu schätzen wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ mit der Poincaréschen und der Hölderschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(v) &= \int_\Omega |Dv|^2\,dx + \int_\Omega f(v-h)\,dx + \int_\Omega fh\,dx \\
&\geq \|Dv\|_2^2 - \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\varepsilon}f^2 + \frac{\varepsilon}{2}(v-h)^2\Big]\,dx - \int_\Omega |fh|\,dx \\
&\geq \|Dv\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{2}{n}}\|Dv - Dh\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_2^2 - \|f\|_2\|h\|_2 \\
&\geq \Big[1 - \varepsilon\Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{2}{n}}\Big]\|Dv\|_2^2 - \varepsilon\Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{2}{n}}\|Dh\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_2^2 - \|f\|_2\|h\|_2.
\end{aligned}$$

   Wählen wir speziell $\varepsilon = (\frac{\omega_n}{|\Omega|})^{\frac{2}{n}}$, so ist $\mathcal{E}(v)$ unabhängig von $v \in \mathcal{K}$ nach unten abgeschätzt.

2. Sei nun $\{u_k\}_k \subset \mathcal{K}$ eine Minimalfolge mit $\lim_{k\to\infty} \mathcal{E}(u_k) = e$. Eine einfache Rechnung unter Verwendung von (1.4) zeigt

$$\mathcal{E}\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big) = \frac{1}{2}\big[\mathcal{E}(u_k) + \mathcal{E}(u_l)\big] - \frac{1}{4}\mathcal{D}(u_k - u_l).$$

Da mit $u_k, u_l \in \mathcal{K}$ auch $\frac{u_k+u_l}{2} \in \mathcal{K}$ richtig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \ \le \ \frac{1}{4}\mathcal{D}(u_k - u_l) \ &\le \ \frac{1}{2}\big[\mathcal{E}(u_k) + \mathcal{E}(u_l)\big] - \mathcal{E}\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big) \\ &\le \ \frac{1}{2}\big[\mathcal{E}(u_k) + \mathcal{E}(u_l)\big] - e \ \to \ 0 \ (k, l \to \infty). \end{aligned}$$

Also bildet $\{Du_k\}_k \subset L^2(\Omega)$ eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega)$, d.h. $\|Du_k - Du_l\|_2 \to 0\,(k, l \to \infty)$. Wegen $u_k - u_l \in H_0^{1,2}(\Omega)$ entnehmen wir nun der Poincaréschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|u_k - u_l\|_{W^{1,2}(\Omega)} \ &\le \ \|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)} + \|Du_k - Du_l\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \ \Big[1 + \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big]\|Du_k - Du_l\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \ (k, l \to \infty), \end{aligned}$$

d.h. $\{u_k\}_k$ ist auch Cauchyfolge in $W^{1,2}(\Omega)$. Da nun $W^{1,2}(\Omega)$ vollständig ist nach Satz 2.2 (a), existiert ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\|u_k - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to \ (k \to \infty)$. Und da $H_0^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}(\Omega)$ ist, gilt auch $u - h \in H_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. $u \in \mathcal{K}$. Die Hölderungleichung liefert ferner

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) \ &= \ \int_\Omega \big(|Du_k|^2 + fu_k\big)\,dx + \int_\Omega \big(|Du|^2 - |Du_k|^2\big)\,dx + \int_\Omega f(u - u_k)\,dx \\ &= \ \mathcal{E}(u_k) + \int_\Omega (Du - Du_k)\cdot(Du + Du_k)\,dx + \int_\Omega f(u - u_k)\,dx \\ &\le \ \mathcal{E}(u_k) + \|Du - Du_k\|_2\|Du + Du_k\|_2 + \|f\|_2\|u - u_k\|_2 \\ &\quad \to e \ (k \to \infty), \end{aligned}$$

also $\mathcal{E}(u) \le e$ und wegen $u \in \mathcal{K}$ schließlich $\mathcal{E}(u) = e$.

3. Zum Beweis von (3.2) betrachten wir noch $u + t\varphi \in \mathcal{K}$ für ein beliebiges $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und $t \in \mathbb{R}$. Setzen wir $\alpha(t) := \mathcal{E}(u + t\varphi)$, so folgt dann $\dot{\alpha}(0) = 0$, was äquivalent zu (3.2) ist.

q.e.d.

Bemerkungen:

1. Es ist nun Aufgabe der Regularitätstheorie zu zeigen, dass eine schwache Lösung des Dirichletproblems (3.1) in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ liegt, zumindest unter zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen an f und h. Wie im Beweis von Satz 1.1 sieht man dann mit dem Gaußschen Satz, dass u klassische Lösung der Poissongleichung und damit von (3.1) ist.

2. Der hier beschriebene Variationszugang lässt sich auf deutlich allgemeinere Differentialgleichungs-Probleme ausdehnen.

Satz 3.2: (Stabilität und Eindeutigkeit schwacher Lösungen)
Seien $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= f_k \quad \text{in } \Omega, \\ u_k &= h \quad \text{auf } \partial\Omega, \qquad k = 1, 2, \end{aligned}$$

mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ und $h \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann folgt

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le c\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer positiven Konstante $c = c(n, |\Omega|)$.

Beweis: Die Differenzfunktion $u := u_1 - u_2 \in H_0^{1,2}(\Omega)$ genügt

$$\int_\Omega \big\{Du \cdot D\varphi + (f_1 - f_2)\varphi\big\}\, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega).$$

Setzen wir insbesondere $\varphi = u$ ein, so folgt

$$\int_\Omega \big\{|Du|^2 + (f_1 - f_2)u\big\}\, dx = 0.$$

Mit Poincaré- und Hölderungleichung erhalten wir also

$$\|Du_1 - Du_2\|_2^2 \le \|f_1 - f\|_2 \|u_1 - u_2\|_2 \le \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}} \|f_1 - f_2\|_2 \|Du_1 - Du_2\|_2$$

bzw.

$$\|Du_1 - Du_2\|_{L^2(\Omega)} \le \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}} \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nochmalige Anwendung der Poincaréschen Ungleichung liefert schließlich

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{W^{1,2}(\Omega)} &\le \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} + \|Du_1 - Du_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \Big[1 + \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big] \|Du_1 - Du_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}} \Big[1 + \Big(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big] \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

wie behauptet. q.e.d.

Literaturverzeichnis

[E] L. C. Evans: *Partial Differential Equations.* AMS-Verlag, Providence, Rhode Island, 1998.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001.

[Jn] F. John: *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.

[Jt] J. Jost: *Partielle Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[S] F. Sauvigny: *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 1,2.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004, 2005.