Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. D. Belomestny

SoSe 2011

Übungen zur Stochastik I

(Blatt 6)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Eine echte Münze (Zahl/Wappen) wird n mal in unabhängiger Folge geworfen. Die Zufallsvariable S_n ist die Anzahl der dabei erzielten Wappen. Wie groß soll n sein, dass die Ungleichung

$$\mathrm{P}(0.35 \leq S_n/n \leq 0.65) > 0.998$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten wir eine Bernoulli-Kette der Länge n, also unabhängige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Deuten wir A_j als Treffer im j-ten Versuch und setzen $X_j = 1\{A_j \cap A_{j+1}\}$ $(j = 1, ..., n)$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}[X_j - p^2] \geq \varepsilon\right) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

In einer Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ bezeichne die S_n die Anzahl von Treffern in n Versuchen. Finden Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \max_{k=1,\ldots,n} \mathrm{P}(S_n = k).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Zufallsgrösse X hat hypergeometrische Verteilung mit Parametern n, r and s, d.h.

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Bestimmen Sie die Grenzverteilung von X, wenn $s, r \to \infty$ und $r/(r+s) \to p$ mit $0 < p < 1$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Es seien $S_1, S_2, S_3, \ldots$ Zufallsvariablen, wobei S_n eine Poisson-Verteilung mit Parameter n besitzt. Zeigen Sie mit Hilfe des ZGWS von Lindeberg-Lévy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(S_n \leq n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!} = \frac{1}{2}.$$

Abgabe:
Donnerstag 30.06.2011 Einwurf Postkasten LE 4. Stock bis 15:45 Uhr