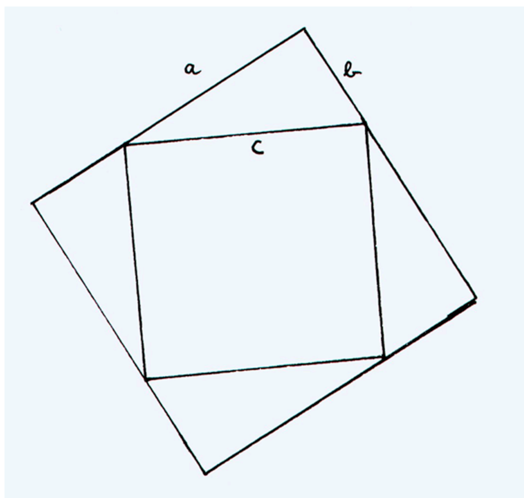
§ 4 Pythagoreische n-Tupel

a) Pythagoreische Tripel und Quadrupel

Es gibt einen schönen geometrischen Beweis für den Satz des Pythagoras:
wir konstruieren aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b ein Quadrat mit den Seiten $a+b$ (vgl. Skizze). Dadurch entsteht innerhalb des grossen Quadrates ein kleineres Quadrat mit der Seitenlänge c. Der Flächeninhalt des grossen Quadrates setzt sich zusammen aus dem Flächeninhalt des kleinen Quadrates und 4 Dreiecksflächen; also gilt

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \ ,$$

woraus nach der binomischen Formel sofort $a^2 + b^2 = c^2$ folgt.



Man stellt nun fest, dass die Summe zweier (bzw. dreier) Quadratzahlen häufig wieder eine Quadratzahl ist. Es ist z.B.

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{oder} \quad 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2 \ ;$$

deshalb ergibt sich die Frage nach weiteren solchen Zahlentripeln bzw. Zahlenquadruplen.

Definition

(a, b, c) mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ bildet ein *pythagoreisches Zahlentripel*, wenn

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gilt.

Schon bei Euklid steht im Buch X, § 28a, wie man solche Tripel konstruiert: Gehe aus von

$$(*) \qquad ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ ;$$

damit ganze Zahlen entstehen, müssen a und b beide gerade oder beide ungerade sein. Damit ein pythagoreisches Zahlentripel entsteht, müssen a und b so gewählt werden, dass ab eine Quadratzahl ist. Das ist der Fall, wenn $a = pq$ und $b = uv$ gilt und wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$p = ku \qquad \text{und} \qquad q = kv\ .$$

Dann wird

$$ab = k^2u^2v^2.$$

Ist $b = uv$ gerade, so ist auch $a = k^2uv$ gerade, und wir erhalten aus $(*)$ nach Division durch $\left(\frac{uv}{2}\right)^2$:

$$(Pl) \qquad 4k^2 + (k^2-1)^2 = (k^2+1)^2, k \in \mathbb{N}.$$

Ist dagegen $b = uv$ ungerade, so muss auch $a = k^2uv$ ungerade, also k ungerade sein. Dann erhält man aus $(*)$ nach Division durch $(uv)^2$:

$$(Py) \qquad k^2 + \left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2, \quad k \in 2\mathbb{N}+1.$$

Die Vorschrift (Pl) stammt laut Proklos von Platon[1], die Vorschrift (Py) von Pythagoras[2].

Wir erhalten nach (Pl) folgende Pythagoreischen Tripel mit $a = 2k, \quad b = k^2 - 1$ und $c = k^2 + 1$:

$$\begin{array}{ccc} k=2 & : & (4,3,5) \\ k=3 & : & (6,8,10) \\ k=4 & : & (8,15,17) \\ k=5 & : & (10,24,26) \\ \vdots & : & \vdots \end{array}$$

Hiermit erhalten wir für alle **geraden** Zahlen $2k$ Pythagoreische Tripel.

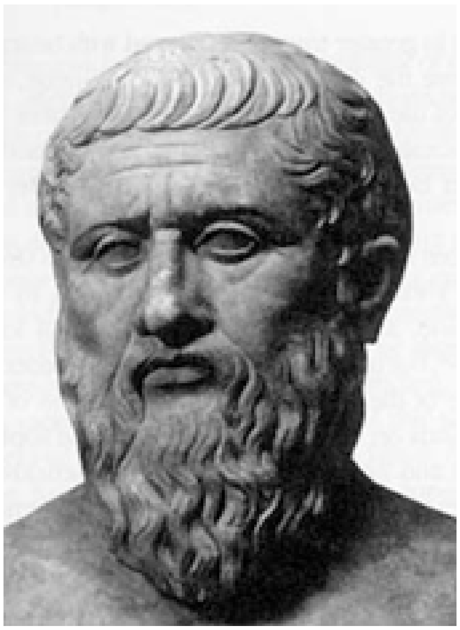
Nach (Py) ergeben sich für $k \in 2\mathbb{N}+1$, d.h. für alle **ungeraden** Zahlen die folgenden

[1]Platon lebte zwischen 427 und 347 v. Chr.. Er war Schüler von Sokrates (470 - 399 v. Chr.). Platon gründete eine eigene Lehr- und Forschungsstätte, die "Akademie", welche nach dem Leitmotiv ausgerichtet war: "Kein Unkundiger der Geometrie trete unter mein Dach." Platon hat keine eigenen mathematischen Schriften hinterlassen. Aber sein Wirken und insbesondere das seiner Akademie übten nachhaltigen Einfluss auf das mathematische Geschehen aus.

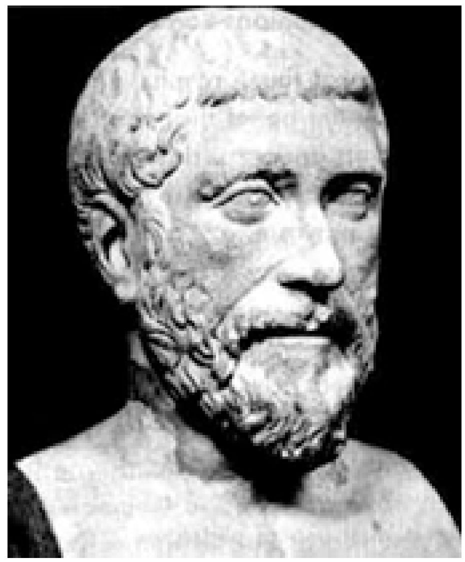
[2]Pythagoras von Samos lebte etwa von 580 bis 500 v. Chr.. Authentische Berichte über das Leben von Pythagoras sind nicht überliefert. Er soll Gründer eines mystischen Geheimbundes in Croton sein, der sich u.a. mit den Sternen, den Eigenschaften natürlicher Zahlen und den Verhältnissen der Saitenlängen bei Musikinstrumenten beschäftigt hat. Nach der Vertreibung aus Croton ließ sich Pythagoras mit einem Teil seiner Anhänger in Metapont nieder. In der Entwicklung der wissenschaftlichen Kenntnisse der Pythagoreer unterscheidet man allgemein 2 Phasen. Die 1., die altpythagoreische Phase, reicht von der Gründung des Bundes in der 2. Hälfte des 6. Jahrhunderts v. Chr. bis in die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. und die 2. Phase, die jungpythagoreische, schliesst sich daran an und endet mit dem Erlöschen des Geheimbundes in der 2. Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr..

Pythagoreischen Tripel mit $a = k$, $b = \dfrac{k^2-1}{2}$ und $c = \dfrac{k^2+1}{2}$:

$$\begin{array}{rcl} k=3 & : & (3,4,5) \\ k=5 & : & (5,12,13) \\ k=7 & : & (7,24,25) \\ k=9 & : & (9,40,41) \\ \vdots & : & \vdots \end{array}$$



Platon



Pythagoras

Etwas "anspruchsvoller" ist eine Lösung zur Bestimmung pythagoreischer Zahlenquadrupel.

Definition
(a, b, c, d) mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ bildet ein *pythagoreisches Zahlenquadrupel*, wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

gilt.

Ist m darstellbar als Summe zweier Quadratzahlen und ebenfalls als Differenz zweier Quadratzahlen, so gilt

$$m = a^2 + b^2 = d^2 - c^2 \ ,$$

also

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \ .$$

Wann gilt nun diese Beziehung? Ist $m = 2k + 1$ eine ungerade Zahl, so gilt

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2 \ .$$

Also ist die Frage zu beantworten, wann eine Zahl m als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist.
Als Vorüberlegung zu dem folgenden Ergebnis, das auf Euler und das Jahr 1749 zurückgeht (vgl. z.B. [ReUl]), überlegen wir uns, dass nur ganz bestimmte natürliche Zahlen als Summe von Quadratzahlen darstellbar sind. Stellen wir nämlich die natürlichen Zahlen in der Form

$$4n + r \quad \text{mit} \quad r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

dar, so kommen als Primzahlen nur die Zahlen $2 = 4 \cdot 0 + 2, 4n + 1$ und $4n + 3$ in Frage. Ist die Zahl von der Form $4n + 3$ und nehmen wir an, dass

$$4n + 3 = r^2 + s^2 \quad \text{mit} \quad r, s \in \mathbb{N}$$

gilt, so folgt wegen der Ungeradheit von $4n + 3$, dass eine Zahl, etwa r, gerade und die andere Zahl ungerade sein muss. Also gilt mit $r = 2k$ und $s = 2l + 1$:

$$4n + 3 = 4k^2 + 4l^2 + 4l + 1 = 4(k^2 + l^2 + l) + 1 \; .$$

Das ist aber ein Widerspruch. Dass die anderen Primzahlen als Summe von zwei Quadraten darstellbar sind, ist (abgesehen von $p = 2$) etwas komplizierter, aber für Studierende der Mathematik verhältnismäßig leicht einzusehen (vgl. z.B. [AiZi]).

Satz 4.1.

Folgende Aussagen über eine Primzahl p sind äquivalent:

(i) Es gilt $p = a^2 + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

(ii) Es ist $p = 2$ oder $p = 4k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Lassen sich p_1 und p_2 jeweils als Summe zweier Quadratzahlen darstellen, etwa

$$p_1 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad p_2 = c^2 + d^2 \; ,$$

so gilt für das Produkt

$$p_1 p_2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 \; ;$$

also lässt sich auch das Produkt als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Damit erhalten wir folgendes

Korollar (vgl. z. B. [AiZi])

Folgende Aussagen über eine natürliche Zahl n sind äquivalent:

(i) Es gilt $n = a^2 + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

(ii) In der Primfaktorzerlegung von n haben alle Primfaktoren der Form $4k + 3$ eine gerade Vielfachheit.

Da es unendliche viele Primzahlen der Form $4k+1$ gibt, gibt es auch unendlich viele pythagoreische Quadrupel. Wir erhalten aus den obigen Ergebnissen:

$$\begin{array}{rcccl} p=5 & = & 1^2+2^2 & = & 3^2-2^2 \\ p=13 & = & 2^2+3^2 & = & 7^2-6^2 \\ p=17 & = & 1^2+4^2 & = & 9^2-8^2 \\ p=29 & = & 2^2+5^2 & = & 15^2-14^2 \\ p=37 & = & 1^2+6^2 & = & 19^2-18^2 \\ p=41 & = & 4^2+5^2 & = & 21^2-20^2 \qquad \text{usw.,} \end{array}$$

also die Quadrupel

$$(1,2,2,3), \quad (2,3,6,7), \quad (1,4,8,9), \quad (2,5,14,15) \quad \text{usw..}$$

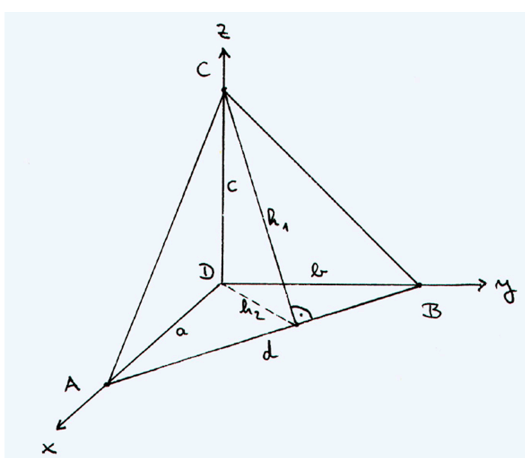
Es gibt aber auch (gemäß des obigen Korollars) andere pythagoreische Quadrupel. Betrachten wir z.B. Zweierpotenzen, so gilt

$$\begin{array}{rcccl} n=8 & = & 2^2+2^2 & = & 3^2-1^2 \\ n=32 & = & 4^2+4^2 & = & 6^2-2^2 \\ p=128 & = & 8^2+8^2 & = & 12^2-4^2 \qquad \text{usw.,} \end{array}$$

Betrachten wir Zahlen, die die Primfaktoren der Form $4k+3$ doppelt enthalten, so können wir auch pythagoreische Quadrupel angeben, z.B.

$$\begin{array}{rcccl} n=5\cdot 9=45 & = & 3^2+6^2 & = & 23^2-22^2 \\ n=13\cdot 9=117 & = & 6^2+9^2 & = & 59^2-58^2 \\ n=17\cdot 9=153 & = & 3^2+12^2 & = & 77^2-76^2 \qquad \text{usw.,} \end{array}$$

Die Frage der Existenz pythagoreischer Zahlentripel lässt sich am rechtwinkligen Dreieck veranschaulichen. Gibt es eine Veranschaulichung für die Zahlenquadrupel. Ja !
Gegeben sei ein rechtwinkliges Tetraeder (vgl. Skizze)



mit den Kanten a, b, c und d. Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und C mit $F_{\triangle ABC}$ usw., so gilt folgender

Satz

$$F^2_{\triangle ACD} + F^2_{\triangle BCD} + F^2_{\triangle ABD} = F^2_{\triangle ABC}$$

Beweis: Bezeichnen wir die Höhe im Dreieck $\triangle ABC$ durch C mit h_1, so gilt

$$F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} d h_1 .$$

Die senkrechte Projektion von h_1 auf die xy-Ebene sei h_2. Dann ist h_2 Höhe im Dreieck $\triangle ABD$ durch D, und es gilt:

$$h_1^2 = h_2^2 + c^2$$

sowie

$$F_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} d h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\, h_2 = \frac{1}{2} ab .$$

Daraus folgt

$$h_2 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

und damit

$$F^2_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} d^2 h_1^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)(h_2^2+c^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + c^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = F^2_{\triangle ABD} + F^2_{\triangle ACD} + F^2_{\triangle BCD} .$$

□

Bemerkungen

Dieser Satz hat eine interessante Geschichte: Ende des 18. Jahrhunderts wurde er von zwei französischen Mathematikern, Ch. de **Tinseau d'Amondans**[3], Schüler von G. **Monge** (*10.5.1746 in Beaune, †28.7.1818 in Paris), und J. P. **de Gua de Malves**[4] als ihr geistiges Eigentum in Anspruch genommen. Erste Überlegungen und Ergebnisse stammen aber wohl von dem Ulmer Rechenmeister Johannes **Faulhaber**[5], der das Ergebnis 1622 veröffentlichte; darauf weist K. H. I. **Buzengeiger**[6] in einem Brief an seinen Schüler Karl Wilhelm **Feuerbach**[7] hin.

[3]Charles de **Tinseau d'Amondans** wurde am 19.4.1748 in Besancon geboren. Er hat nur 3 wissenschaftliche Arbeiten verfasst, eine nicht veröffentlichte über astronomische Themen und zwei, die sich mit der Theorie der Flächen und Kurven doppelter Krümmung beschäftigen. Tinseau d'Amondans verstarb am 21.3.1822 in Montpellier

[4]Jean Paul **de Gua de Malves** wurde 1712 (oder 1713) in Carcassonne geboren; er war Geistlicher und Mathematiker und publizierte 1783 den obigen Satz über das rechtwinklige Tetraeder. J. P. de Gua de Malves verstarb am 2.6.1785 in Paris.

[5]Johannes **Faulhaber** wurde am 5.5.1580 in Ulm geboren. Er erlernte das Weberhandwerk und erhielt Unterricht bei einem Rechenmeister und einem Eichmeister. Er wurde von der Stadt Ulm u.a. als Rechenmeister angestellt. Er verwandelte die Rechenschule in eine mathematische, Artellerie- und Ingenieurschule. Er förderte die Kenntnis der figurierten Zahlen, fand als erster die Summenformel der Potenzen der natürlichen Zahlen bis zur 13. und erweiterte die Logarithmen. Faulhaber verstarb 1635 in Ulm

[6]Karl Heribert Ignatius **Buzengeiger** wurde am 16.3.1771 in Tübingen geboren. Er war zunächst als Mathematik-Lehrer in verschiedenen Orten tätig, bis er schließlich 1819 an die Universität Freiburg berufen wurde. Buzengeiger verstarb am 7.9.1835 in Freiburg.

[7]Karl Wilhelm **Feuerbach** wurde am 30.5.1800 in Jena geboren. Er ist der Sohn des bedeutenden

Faulhaber dachte allerdings bei seinen Überlegungen nur an das rechtwinklige Tetraeder mit gleich langen Seiten zur Basis. René **Descartes**[8] bewies den dreidimensionalen Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Tetraeder mit beliebig langen Seitenkanten. Er benutzte beim Beweis die heronische Formel - benannt nach **Heron von Alexandria**[9] - zur Berechnung des Flächeninhalts F eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten a, b, c, nämlich

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

mit

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)\ .$$

Tinseau beweist eine noch etwas stärkere Aussage, nämlich:
Das Quadrat eines ebenen Flächenstücks im Raum ist gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf die Koordinatenebenen.

b) Einige Ergebnisse von P. de Fermat

Wir wollen uns mit ein paar Fragestellungen aus der Zahlentheorie beschäftigen, die von P. der Fermat gelöst bzw. deren Lösung angestoßen wurde.

Pierre de **Fermat** wurde am 20.8.1601 in Beaumont-de-Lomagne geboren. Er studierte Rechtswissenschaften, wurde Anwalt und später königlicher Hofrat am Parlament von Toulouse. Nur in Mußestunden beschäftigte er sich mit Mathematik. Berühmt geworden ist der Große Fermatsche Satz, dass für $n \geq 3$ die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine ganzzahlige Lösung besitzt. Er schrieb dazu in seiner Diophant-Ausgabe, dass er einen wunderbaren Beweis entdeckt habe, doch der Rand zu schmal sei, ihn zu fassen. Es hat ungefähr 350 Jahre gedauert, bis diese Aussage endlich 1995 von Taylor und Wiles bewiesen wurde. Fermat starb am 12.1.1665 in Castres.

Kriminalisten und Juristen Johann Paul Anselm von Feuerbach und ein Bruder des Philosophen Ludwig Feuerbach. Er studierte in Erlangen und Freiburg und war an verschiedenen Gymnasien u.a. in Erlangen und Hof als Professor tätig. 1822 veröffentlichte er eine Arbeit über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Dabei trat auch der später nach ihm benannte Feuerbach-Kreis auf, der dort kein Neunpunktekreis, sondern ein Sechspunktekreis ist. Feuerbach verstarb am 12.3.1834 in Erlangen

[8]René **Descartes** (lat. Cartesius) wurde am 31.3.1596 in La Haye/Touraine geboren. Er erhielt am Jesuitenkolleg La Fleche eine hervorragende, auch Naturwissenschaften umfassende Ausbildung, studierte in Poitiers, stand einige Zeit im Kriegsdienst und trat in Italien, Paris und den Niederlanden in persönlichen Kontakt zu herausragenden Naturforschern seiner Zeit. Im Vertrauen auf größere Gedankenfreiheit ließ er sich 1629 in den Niederlanden nieder, geriet aber mit seiner Philosophie auch hier mit konservativen kirchlichen Kreisen in Konflikt und folgte daher 1649 einer Einladung der schwedischen Königin Christine nach Stockholm. Dort verstarb er am 11.2.1650 in seinem ersten skandinavischen Winter.

[9]**Heron von Alexandria** lebte zwischen 150 und 250 v. Chr. in Alexandria; meist wird jedoch seine Lebenszeit um 100 n. Chr. angenommen.

Da Fermat keine Kontakte zur Pariser Mathematikerschule gepflegt hatte und seine frustrierten Korrespondenzpartner ihn nicht unbedingt in angenehmer Erinnerung bewahrten, liefen seine Entdeckungen Gefahr, nach seinem Tod für immer verloren zu gehen. Glücklicherweise erkannte sein ältester Sohn Clément-Samuel, dass die Liebhabereien seines Vaters von enormer Bedeutung waren. Er verbrachte fünf Jahre damit, die Aufzeichnungen und Briefe seines Vaters zu sammeln und die Randnotizen in seiner Ausgabe der *Arithmetica* zu entziffern. Im Jahr 1670 brachte er in Toulouse eine besondere Ausgabe der Arithmetica mit dem Namen *Diophanti Alexandrini arithmeticorum cum observationibus P. de Fermat* heraus. Aus dieser Ausgabe zitieren wir einige Ergebnisse.

Im August 1659 schreibt Fermat in einem Brief an Pierre **de Carcavi**[10], welche Sätze er zu den schönsten und bedeutendsten Ergebnissen zählt.

Satz 4.2. (**Zwei-Quadrate-Satz, vgl. Satz 4.1**)
Ist $p = 4k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so ist p eindeutig als Summe zweier Quadrate darstellbar (bis auf Vorzeichen und Reihenfolge der Summanden).

Satz 4.3. (**Vier-Quadrate-Satz**)
Jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt sich als Summe von vier Quadraten natürlicher Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ darstellen.

Satz 4.4.
Es sei $n \in \mathbb{N}$ kein Quadrat. Dann hat die Gleichung

$$nx^2 + 1 = y^2$$

unendlich viele Lösungen in $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Satz 4.5.
Die Gleichung

$$x^3 + y^3 = z^3$$

besitzt keine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

Satz 4.6.
Die einzige Lösung der Gleichung

$$x^3 = y^2 + 2$$

in $\mathbb{N}^2$ ist $x = 3$ und $y = 5$.

Ferner behauptet er, dass jede Zahl der Form

$$2^{2^n} + 1$$

eine Primzahl ist. Weitere Ergebnisse aus seinen Briefen - die er anscheinend nicht zu den wichtigsten zählt - sind:

---

[10]Pierre **de Carcavi** wurde um 1600 in Lyon geboren; er arbeitete zusammen mit Fermat im juristischen Dienst in Toulouse, war allerdings später in Paris tätig. Er war Gründungsmitglied der Pariser Akademie und Kommunikationsmittelpunkt seiner Zeit, befreundet mit Fermat, C. Huygens und B. Pascal und korrespondierte mit R. Descartes. Durch seinen Briefwechsel verbreitete er Arbeiten und Ideen von Fermat. Nach älteren Quellen soll er sich selbst mit der Kreisquadratur beschäftigt haben. Carcavi verstarb im April 1684 in Paris.

Satz 4.7.
Die Gleichung
$$x^4 + y^4 = z^2$$
(insbesondere auch die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$) ist in $\mathbb{N}^3$ unlösbar.

Satz 4.8. (aus einem Brief an Blaise **Pascal**[11] vom 25.9.1654)
Ist $p = 3k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so kann p in der Form $p = x^2 + 3y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ dargestellt werden.
Ist $p = 8k+1$ oder $p = 8k+3$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so ist p von der Form $x^2 + 2y^2$.

Satz 4.9.
Jede Zahl ist Summe von höchstens drei Dreieckszahlen.

Satz 4.10.
Keine Dreieckszahl (außer 1) ist eine dritte Potenz.

Satz 4.11.
Etwa 1637 schrieb Fermat seine berühmte Bemerkung in sein privates Exemplar der Bachetschen Diophant-Ausgabe:
$$x^n + y^n = z^n$$
ist für $n \geq 3$ in $\mathbb{Z}^3$ nicht lösbar. Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.

Der einzige Satz, für den Fermat selbst einen einigermaßen vollständigen Beweis gegeben hat und dessen Idee auch bei anderen Aussagen verwendet wurde, ist Satz 4.7. Deshalb betrachten wir folgende *Methode des unendlichen Abstiegs* im

Beweis zu Satz 4.7:
Angenommen, die Behauptung sei falsch; dann gibt es paarweise teilerfremde Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit
$$(*) \qquad x^4 + y^4 = z^2.$$
Wir betrachten ein (x, y, z) mit minimalem $z \in \mathbb{N}$, welches $(*)$ erfüllt, d.h.
$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$$
oder
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{mit } a = x^2, b = y^2, c = z).$$

[11] Blais **Pascal** wurde am 19.6.1623 in Clermant Ferrand geboren. Seine Mutter starb, als Pasccal 3 Jahre alt war. Sein Vater unterrichtete die Kinder selbst und ging mit seinem Sohn und den beiden Töchtern 1631 nach Paris. Pascal interessierte sich sehr früh fr Fragestellungen aus der Geometrie. 1639 (also im Alter von 16 Jahren) schrieb er eine Abhandlung über Kegelschnitte. 1654 tauschte sich Pascal mit P. Fermat und C. Huygens über Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus. Die Korrespondenz über diese und andere Fragen wurde jedoch nicht weiter fortgesetzt. 1655 - 1657 beschäftigte sich Pascal mit religionsphilosophischen Fragen, und wandte sich anschließend wieder der Mathematik zu. Nach 1659 konnte er aus gesundheitlichen Gründen nicht mehr arbeiten; am 19.8.1666 verstarb Pascal in Paris.

(a, b, c) bildet also ein pythagoreisches Zahlentripel. Wegen der Teilerfremdheit von x, y, z sind auch a, b, c teilerfremd; also sind nicht alle drei Zahlen $a,\ b,\ c$ gerade und auch nicht alle drei ungerade. Es ist genau eine der drei Zahlen gerade, denn wenn zwei Zahlen gerade und eine ungerade wären, ergäbe sich ein Widerspruch zur "Parität" auf den beiden Seiten der Gleichung, da die Quadrate von Zahlen dieselbe Parität wie die Zahlen selbst haben. Wäre c gerade, so folgte, daß c^2 ein Vielfaches von 4 ist. Dann sind a und b ungerade, etwa

$$a = 2d + 1 \text{ und } b = 2e + 1;$$

es folgt

$$a^2 + b^2 = 4(d^2 + d + e^2 + e) + 2,$$

was kein Vielfaches von 4 ist; damit ist a oder b gerade.
Sei a gerade; dann gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b),$$

wobei $a, c + b$ und $c - b$ gerade sind. Wir setzen $a = 2k, c - b = 2m$ und $c + b = 2n$. Daraus folgt $c = m + n$ und $b = n - m$. Die Teilerfremdheit von a, b, c impliziert die Teilerfremdheit von m und n. (Wäre nämlich $m = l \cdot m'$ und $n = l \cdot n'$, so folgte aus $c + b = 2ln'$ und $c - b = 2lm'$ sofort $c = l(n' + m')$ und $b = l(n' - m')$.) Außerdem dürfen m und n nicht beide ungerade sein, denn sonst wäre $b = n - m$ gerade. Die Gleichung

$$k^2 = mn$$

impliziert dann wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl, dass m und n beides Quadrate sein müssen, etwa $m = p^2$ und $n = q^2$ mit $q > p$. Daraus folgt

$$k = pq\ .$$

Insgesamt haben wir damit

$$a = x^2 = 2pq, \quad b = y^2 = q^2 - p^2 \quad \text{und} \quad c = z = q^2 + p^2,$$

wobei p und q wegen der Teilerfremdheit von x und y ebenfalls teilerfremd sind. Wegen $2pq = x^2$ folgt dann (wenn wir gerades p voraussetzen)

$$p = 2r^2 \quad \text{und} \quad q = s^2.$$

Einsetzen in $y^2 + p^2 = q^2$ liefert:

$$y^2 + (2r^2)^2 = s^4\ .$$

Also bildet $(2r^2, y, s^2)$ ein pythagoreisches Tripel, wobei $y,\ r$ und s paarweise teilerfremd sind. Die obigen Überlegungen liefern für dieses Tripel

$$2r^2 = 2tu, \quad y = t^2 - u^2, \quad s^2 = t^2 + u^2$$

mit teilerfremden Zahlen t und u. Wegen $tu = r^2$ und der Teilerfremdheit von t und u gilt

$$t = v^2, \quad u = w^2,$$

also

$$v^4 + w^4 = s^2$$

mit

$$z = c = p^2 + q^2 = (2r^2)^2 + s^4 > s^4 \geq s \ ,$$

denn mit $y > 0$ ist auch $r > 0$. Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Minimalitätsforderung an c. $\square$

Bemerkungen

a) Die Idee aus dem Beweis zu Satz 4.7 liefert ein Konstruktionsverfahren für teilerfremde pythagoreische Zahlentripel: Man wähle zwei beliebige teilerfremde Quadrate unterschiedlicher Parität (d.h. ein gerades und ein ungerades Quadrat), etwa $v = p^2$ und $w = q^2$ mit $q > p$; dann bilden

$$a = 2pq, \quad b = q^2 - p^2, \quad \text{und} \quad c = q^2 + p^2$$

ein pythagoreisches (teilerfremdes) Zahlentripel wegen

$$a^2 + b^2 = (2pq)^2 + \left(q^2 - p^2\right)^2 = \left(q^2 + p^2\right)^2 = c^2 \ .$$

Wir erhalten z.B. für $v = 3^2$ und $w = 4^2$ das Tripel $(24, 7, 25)$.

b) Aus dem Bewiesenen folgt, dass die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ in $\mathbb{N}^3$ keine Lösung besitzt. Damit hat sogar

$$(*) \qquad x^{2^k} + y^{2^k} = z^{2^k}$$

für $k \geq 2$ keine Lösung in $\mathbb{N}^3$. (Wäre nämlich a, b, c eine Lösung von $(*)$, so wäre $\left(a^{2^{k-2}}, b^{2^{k-2}}, c^{2^{k-2}}\right)$ eine Lösung von $x^4 + y^4 = z^4$.)

c) Ist n keine Zweierpotenz, so ist n durch mindestens eine ungerade Primzahl p teilbar, etwa

$$n = p \cdot m.$$

Wäre (a, b, c) eine Lösung von $x^n + y^n = z^n$, so wäre (a^m, b^m, c^m) eine Lösung von

$$(**) \qquad x^p + y^p = z^p.$$

Um also die Fermatsche Vermutung zu beweisen, muß man **<u>nur</u>** zeigen, daß $(**)$ für (ungerade) Primzahlen p keine nichttriviale Lösung in $\mathbb{N}^3$ besitzt.

d) Im Zusammenhang mit der Lösung der Gleichung

$$(*) \qquad nx^2 + 1 = y^2$$

aus Satz 4.4 ist bei gegebenem n, welches keine Quadratzahl ist, das kleinste x in $\mathbb{N}$ gesucht derart, daß (x, y) eine Lösung von $(*)$ ist.

Der nachfolgenden Tabelle entnimmt man, daß anscheinend keine "Regelmäßigkeit" für die "kleinsten" Lösungen von $(*)$ erkennbar ist:

n	x	y
2	2	3
3	1	2
5	4	9
6	2	5
7	3	8
8	1	3
10	6	19
11	3	10
12	2	7
13	180	649
14	4	15
15	1	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
60	4	31
61	226.153.980	1.766.319.049
62	8	63
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
108	130	1.351
109	15.140.424.455.100	158.070.671.986.249
110	2	21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
148	6	73
149	2.113.761.020	25.801.741.449
150	4	49
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fermat stellt in seinen Briefen die Aufgabe, eine Lösung der Gleichung $nx^2+1=y^2$ mit $n=61, \quad n=109$ und $n=149$ zu finden.

c) Zur Geschichte des Fermat-Problems

Wir betrachten die Gleichung

$$(*) \qquad x^p + y^p = z^p$$

in $\mathbb{Z}^3$ für ungerade Primzahlen $p \geq 3$.

L. **Euler** fand **1753** einen Beweis, daß im Fall **p=3** die Gleichung $(*)$ nur die triviale Lösung mit $x \cdot y \cdot z = 0$ besitzt.
S. **Germain** skizzierte 1815 in einem Brief an Gauß eine Rechnung, die sich um eine bestimmte Gattung von Primzahlen p drehte, nämlich um solche, bei denen ebenfalls $2p+1$ eine Primzahl ist. Sie konnte auf elegante Weise zeigen, dass bei solchen Primzahlen vermutlich keine nichttrivialen, ganzzahligen Lösungen von $(*)$ existieren. Zu solchen

Primzahlen gehören die Zahlen 3, 5 und 11. In diesen Fällen ist eine der Zahlen x, y, z, die die Gleichung $(*)$ erfüllen, durch p teilbar.

Im Jahre **1825** bewiesen unter Verwendung der Methode von S. Germaine unabhängig voneinander J. P. G. **Leujene Dirichlet** (*13.2.1805 in Düren, †5.5.1859 in Göttingen) und Adrien-Marie **Legendre** (* 18.9.1752 in Paris, †9.1.1833 in Paris) die Fermat-Vermutung für **p=5** (zu dieser Zeit war Legendre 73 Jahre alt.)

Gabriel **Lamé** (*22.7.1795 in Tours, †1.5.1870 in Paris) fand **1840** die Lösung für **p=7**.

Nach der "bahnbrechenden" Idee von S. Germaine schrieb die französische Akademie der Wissenschaften unter anderem eine Goldmedaille und 3000 Franc für jenen Mathematiker aus, der das Geheimnis der Fermatschen Vermutung lüften würde.

Am 1. März 1847 fand die dramatischste Sitzung in der Geschichte der Akademie statt. G.Lamé erklärte, dass er einem Beweis der Fermatschen Vermutung sehr nahe sei und dass er in der kommenden Woche einen vollständigen Beweis im Journal der Akademie veröffentlichen werde. Sobald Lamé den Sitzungssaal verlassen hatte, bat Augustin Louis **Cauchy**[12] um Erlaubnis zu sprechen. Er kündigte an, dass auch er einen vollständigen Beweis veröffentlichen werde. In den folgenden Wochen stieg die Spannung, denn sowohl Cauchy als auch Lamé publizierten vielversprechende Einzelheiten ihrer Beweise in den Sitzungsberichten der Akademie. Aber alle warteten gespannt auf den endgültigen Beweis.

Dann, am 24. Mai, gab es eine Ankündigung, die alle Spekulationen beendete. Aber weder Lamé noch Cauchy traten vor die Akademie, sondern Joseph **Liouville** [13]. Er verlas einen Brief des deutschen Mathematikers Ernst Kummer und versetzte damit dem gesamten Publikum einen Schock. Kummer wies darauf hin, dass es keine mathematische Theorie gebe, mit der man das Problem der sog. irregulären Primzahlen auf einen Streich erledigen könne, und die Menge der irregulären Primzahlen sei unendlich groß.

Ernst Eduard **Kummer**[14] erzielte einen größeren Durchbruch. Um das Ergebnis zu formulieren, benötigen wir die Bernoulli-Zahlen, d.h. die Zahlen $(B_k)_{k\geq 0}$, die sich aus der

[12]Augustin Louis **Cauchy** wurde am 21.8.1789 in Paris geboren. Augustin-Louis Cauchy wurde am 21.8.1789 in Paris geboren. Nach dem Studium war er zunächst als Ingenieur tätig. Seine mathematischen Kenntnisse eignete er sich im Selbststudium an. 1830 emigrierte Cauchy nach Turin, da er nach der Julirevolution 1830 in Frankreich im Widerspruch zur neuen Regierung stand. 1833 ging er nach Prag, wo er den gestürzten Bourbonenknig Karl X. unterrichtete. 1838 kehrte Cauchy nach Paris zurück. Cauchy hat insgesamt 7 Monographien und über 800 Artikel verfasst. Viele Begriffe und Sätze in der Mathematik sind mit seinem Namen verbunden, zum Beispiel der Begriff der Cauchy-Folge, das Cauchysche Konvergenzkriterium, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, der Cauchysche Integralsatz oder die Cauchyschen Integralformeln. Am 22.5.1857 verstarb Cauchy in Sceaux (bei Paris).

[13]Joseph **Liouville** wurde am 24.3.1809 in St. Omer geboren. Er studierte ab 1825 an der Ecole Polytechnique und von 1827 bis 1830 an der Ecole des Ponts et Chausses in Paris. 1831 wurde er Professor für Analysis und Mechanik an der Ecole Polytechnique. Er lehrte auch Mathematik und Mechanik an anderen Bildungseinrichtungen in Paris. 1851 erhielt er den Lehrstuhl für Mathematik am Collége de France, den er bis 1879 innehatte. Ausserdem war er von 1857 bis 1874 auf dem Lehrstuhl für Mechanik an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Pariser Universität. Liouville verstarb am 8.9.1882 in Paris.

[14]Ernst Eduard **Kummer** wurde am 29.1.1810 in Sorau geboren. Nach seiner Promotion an der Universität Halle war er bis 1842 als Gymnasiallehrer in Sorau und Liegnitz tätig. Dann ging er für 13 Jahre als Professor für Mathematik an die Universität Breslau. 1855 wurde er Nachfolger von Dirichlet an der Berliner Universität und an der Berliner Akademie. Kummer war für seine Zeitgenossen die "Idealgestalt eines Forschers und Gelehrten". Er verstarb am 14.5.1893 in Berlin.

Rekursionsformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

mit $B_0 = 1$ ergeben. Die Faktoren vor den Zahlen B_k sind die sog. Binomialkoeffizienten, die sich aus dem Pascal-Dreieck berechnen lassen. Wir erhalten

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_k = 0 \quad \text{für ungerades} \quad k \geq 3$$

und

$$B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}, \qquad B_6 = \frac{1}{42}, \qquad B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \qquad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510},$$

$$B_{18} = \frac{43867}{798} \qquad \text{usw.}$$

Satz 4.12.

Es sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Teilt p keinen Zähler der Bernoulli-Zahlen $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$, dann besitzt $(*)$ nur triviale Lösungen mit $x \cdot y \cdot z = 0$.

Bemerkung

(i) Eine Berechnung der Bernoulli-Zahlen ergab, daß die Fermatsche Vermutung für alle Primzahlen $p < 100$ mit eventueller Ausnahme von $p = 37,\ 59$ oder 67 richtig ist. Erfüllt eine Primzahl p die Voraussetzungen zu Satz 4.12, so sprechen wir von einer *regulären Primzahl*; sonst heißt eine Primzahl *irregulär*. Die Primzahl 37 ist irregulär, da 37 den Zähler von B_{32} teilt.

(ii) Allein zwischen 1908 und 1912 wurden über 1000 falsche Beweise für die Fermatsche Vermutung publiziert.

1915 bewies Johann Ludwig William Valdemar **Jensen**[15], dass es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt.

(iii) Durch Verfeinerung des Prinzips des unendlichen Abstiegs (vgl. Beweis zu Satz 4.7) und durch Verwendung von Satz 4.12 wurde bis 1992 gezeigt, daß die Fermatsche Vermutung für alle Primzahlen

$$p < 4 \cdot 10^6$$

richtig ist.

(iv) Warum es gefährlich ist, aus dieser Tatsache zu folgern, dass die Fermatsche Vermutung allgemein richtig ist, zeigt folgende Vermutung, die von L. Euler aufgestellt wurde:

[15] J.L.W.V. **Jensen** wurde am 8.5.1859 in Dänemark geboren, war als Telefoningenieur tätig und in der Mathematik Autodidakt. Er starb am 5.3.1925 in Kopenhagen

Es gibt keine nichttriviale ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$$

(vgl. Definition der Pythagoreischen Quadrupel). Erst im Jahr 1988 konnte Naom **Elkies** von der Harvard-University zeigen, dass

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$$

gilt. Elkies bewies außerdem, dass die obige Gleichung unendlich viele Lösungen besitzt.

Zum Abschluss noch ein paar Bemerkungen zur Entstehung und Präsentation des Beweises der Fermatschen Vermutung:

Im Mai 1993 war Andrew **Wiles** (* 11.4.1953 in Cambridge) davon überzeugt, die obige Vermutung bewiesen zu haben. Deshalb kündigte er auf einer Konferenz am Isaac Newton Institute in Cambridge über "L-Funktionen und Arithmetik" eine Vortragsreihe mit dem Titel "Modulformen, elliptische Kurven und Galois-Darstellungen" an. Er hielt drei Vorträge am 21.,22. und 23.6.1993.

Nach Wiles' Vortrag in Cambridge informierte man umgehend das Wolfskehl-Komitee über den Beweis. Der Mediziner und Mathematiker Paul **Wolfskehl**[16] hinterließ nach seinem Tod ein Preisgeld von 100000 Mark für denjenigen, der bis zum Jahre 2007 die Fermatsche Vermutung bewiesen hat. Aber nach den Wettbewerbsregeln musste der Beweis formell veröffentlicht und von anderen Mathematikern bestätigt werden, denn es hieß

> "Die königliche Gesellschaft der Wissenschaften ... berücksichtigt für die Preiszuteilung lediglich solche mathematischen Abhandlungen, die in periodischen Zeitschriften, als Monographien oder in Buchform käuflich erschienen sind. ... Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft erfolgt frühestens zwei Jahre nach der Veröffentlichung der zu krönenden Abhandlung. Es soll innerhalb dieses Zeitraums deutschen und ausländischen Mathematikern Gelegenheit geboten werden, über die Richtigkeit der durch die Veröffentlichung bekannt gewordenen Lösung sich zu äußern."

A. Wiles reichte sein Manuskript bei der Zeitschrift "Inventiones Mathematicae" ein, und nun lag es an deren Herausgeber B. Mazur, die Gutachter auszuwählen. Wegen der Vielfalt der verwandten Methoden und wegen der Bedeutung des Ergebnisses wählte Mazur statt der üblichen zwei bis drei Gutachter diesmal sechs Gutachter aus.

Kapitel 3 lag in der Obhut von *Nick Katz*; es umfasste 70 Seiten. Mit Unterstützung von *Luc Illusie* waren sie den ganzen Sommer über damit beschäftigt, das Kapitel Zeile für

[16] Paul Friedrich **Wolfskehl** wurde am 30.6.1856 in Darmstadt geboren. Er studierte von 1875 bis 1880 Medizin und wurde (sehr wahrscheinlich 1880) in Medizin promoviert. Da er etwa zu dieser Zeit an Multipler Sklerose erkrankte und deshalb den Beruf des Mediziners nicht länger hätte ausüben können, entschloss er sich Mathematik zu studieren (bis 1884). Er hörte Vorlesungen bei Kummer und hielt selbst in der Zeit von 1887 bis 1890 Vorlesungen an der TU Darmstadt über Zahlentheorie. Wegen des sich verschlechternden Gesundheitszustandes musste er seine Dozententätigkeit aufgeben. Wolfskehl starb am 13.9.1906. In seinem Testament hat er das Preisgeld für den Beweis der Fermatschen Vermutung ausgesetzt.

Zeile durchzusehen. Wenn sie etwas nicht verstanden, schickten sie A. Wiles eine E-Mail; meist erhielten sie schon am selben oder am nächsten Tag eine klärende Antwort, und dann gingen sie weiter zum nächsten Problem. Um den 23. August herum tauchte eine Frage auf, auf die A. Wiles keine zufriedenstellende Antwort geben konnte.
Im Januar 1994 lud A. Wiles seinen ehemaligen Studenten Richard Taylor, der als Dozent in Cambridge tätig war, nach Princeton ein, um gemeinsam mit ihm an der "Lücke" im Beweis zu arbeiten. Taylor hatte die Vorträge von Wiles in Cambridge gehört und war auch einer der 6 Gutachter, also bestens mit den Ideen des "Beweises" vertraut.
Im Frühjahr 1994 tauchte eine E-mail auf, Noam **Elkies** habe ein Gegenbeispiel zur Fermatschen Vermutung gefunden. Die Lösung enthalte einen unglaublich großen Primzahlexponenten (größer als 10^{20}). Bei genauerer Betrachtung stellte man fest, dass die ursprüngliche Nachricht vom 1. April 1994 stammte. Die Nachricht war ein boshafter Scherz des kanadischen Zahlentheoretikers Henri Darmon.
Endlich, im September 1994 gelang es Wiles und Taylor, die Lücke im Beweis zu schließen. Am 25. Oktober 1994 wurde von *Karl Rubin* von der Ohio-State-University eine E-mail verschickt:

> Heute morgen wurden zwei Manuskripte freigegeben:
>
> "Modulare elliptische Kurven und Fermats letzter Satz" von A. Wiles
>
> sowie
>
> "Ringtheoretische Eigenschaften bestimmter Hecke-Algebren" von R. Taylor und A. Wiles.

Die beiden Artikel mit zusammen 130 Seiten waren die am gründlichsten geprüften Manuskripte in der Geschichte der Mathematik. Sie wurden schließlich im Mai 1995 in den *Annals of Mathematics* 141 veröffentlicht, und zwar die Arbeit von A. Wiles auf den Seiten 443 bis 551 und die gemeinsame Arbeit mit Taylor auf den Seiten 553 bis 572.

Zusammenfassung

Nachfolgend ist aufgelistet, wann und von wem Ergebnisse zur Lösung der Fragestellung, ob die Gleichung

$$(*) \qquad x^n + y^n = z^n$$

in $\mathbb{Z}^3$ für $n \geq 3$ nur die triviale Lösung $x \cdot y \cdot z = 0$ besitzt, erzielt wurden. Hier eine Auswahl:

Die Liste der Mathematiker-Namen, die zur endgültigen Lösung des Fermat-Problems beigetragen haben, ist sehr lang.

> Gerhard **Frey** (* 1944)
>
> Barry Charles **Mazur** (19.12.1937 in New York)
>
> Kenneth A. **Ribet**
>
> Jean Pierre **Serre** (*15.9.1926 in Bages (Frankreich), Träger der Fields-Medaille im Jahre 1954)

Gorõ **Shimura** (*23.2.1930)

Yutaka **Taniyama** (* 12.11.1927, †17.11.1958)

Richard **Taylor** (*19.5.1962)

André **Weil** (*6.5.1906 in Paris, †6.8.1998 in Princeton)

Andrew **Wiles** (*11.4.1953 in Cambridge)

	Autor	Jahr
$n \geq 3$	Fermat'sche Vermutung	1637
$n = 4$	Fermat	1659
$n = 2^k$ mit $k \geq 2$	Folgerung	
$n = 3$	Euler	1753
$n = 3 \cdot m$ mit $m \geq 2$	Folgerung	
$n = 5$	Dirichlet	1825
$n = 5$	Legendre	1825
$n = 5 \cdot m$ mit $m \geq 2$	Folgerung	
$n = 7$	Lamé	1840
$n = 7 \cdot m$ mit $m \geq 2$	Folgerung	
n reguläre Primzahl	Kummer	1847
Es gibt unendlich viele irreguläre Primzahlen	Jensen	1915
n Primzahl $< 4 \cdot 10^6$		≤ 1992
n beliebig ≥ 3	Wiles & Taylor	1994