§ 10 Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen

Für die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum a_n$ ist die Reihe mit den nichtnegativen Gliedern $|a_n|$ zu untersuchen. Die meisten Konvergenzkriterien dieses Paragraphen beruhen daher auf dem Monotonie-Kriterium 9.5 für Reihen; zu untersuchen ist, ob die Folge der Partialsummen $\sum_{k=m}^{n} |a_k|$ beschränkt ist oder nicht.

10.1 Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien $(a_n)_{n\geq m}, (b_n)_{n\geq m}$ zwei Folgen mit

$$|a_n| \leq b_n \text{ für fast alle } n.$$

(i) Ist $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und daher erst recht konvergent.

(ii) Ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ divergent, so auch $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt mit geeignetem n_0 für $k \geq n_0$

(1) $$|a_k| \leq b_k.$$

(i) Es ist $\sum_{k=m}^{n} |a_k| \underset{(1)}{\leq} \sum_{k=m}^{n_0-1} |a_k| + \sum_{k=n_0}^{n} b_k$ für $n \geq n_0$. Da $\sum_{k=n_0}^{n} b_k$ nach oben beschränkt ist, ist auch $\sum_{k=m}^{n} |a_k|$ nach oben beschränkt und somit konvergent (siehe 9.5).

(ii) Da $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ divergiert (siehe 9.11), und $\sum_{k=n_0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^{n} b_k$ ist, ist $\sum_{k=n_0}^{n} b_k$ unbeschränkt. Daher ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ und somit auch $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ divergent (siehe 9.8(i)). □

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, ist für $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q \leq 1$ wegen $\frac{1}{n^q} \geq \frac{1}{n}$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ divergent (benutze 10.1(ii)). Als Korollar erhalten wir:

10.2 Grenzwertkriterium

Seien $(a_n)_{n\geq m}, (b_n)_{n\geq m}$ zwei Folgen mit positiven Gliedern. Konvergiert dann a_n/b_n gegen einen positiven Grenzwert, so haben die Reihen $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ das gleiche Konvergenzverhalten.

Beweis. Konvergiere a_n/b_n gegen $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt mit $\beta := \alpha/2$ und $\gamma := (3/2)\alpha$:

(1) $$0 < \beta b_n < a_n < \gamma b_n \text{ für fast alle } n.$$

(Zum Nachweis dieser Ungleichung beachte, daß nach Definition der Konvergenz von $\frac{a_n}{b_n}$ gegen α (mit $\varepsilon := \frac{\alpha}{2}$) gilt: $|\frac{a_n}{b_n} - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$ für fast alle n.)
Nach dem Majorantenkriterium 10.1(i) ist daher $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ konvergent ist. (Ist z.B. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist wegen (1) nach 10.1(i) auch $\sum_{n=m}^{\infty} \beta b_n$ konvergiert und somit $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ nach 9.9(iii).) □

10.3 Wurzelkriterium

(i) Gibt es ein $q \in]0,1[$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n, so ist die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(ii) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. ***(i)*** Es ist $|a_n| \leq q^n$ für fast alle n. Die Behauptung folgt daher aus dem Majorantenkriterium 10.1(i), da die geometrische Reihe (siehe 9.3(i)) konvergent ist.
(ii) Aus der Voraussetzung folgt $|a_n| \geq 1$ unendlich oft, also ist $(a_n)_{n\geq m}$ keine Nullfolge und somit ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nicht konvergent (siehe 9.7). □

10.4 Quotientenkriterium

Sei $a_n \neq 0$ für fast alle n.

(i) Gibt es ein $q \in]0,1[$ mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für fast alle n, dann ist die $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(ii) Gilt jedoch $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle n, dann ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. ***(i)*** Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}|/|a_n| \leq q$ für alle $n > n_0$ gilt. Daher gilt für jedes $n > n_0$

$$|a_n/a_{n_0}| = |a_n/a_{n-1}| \cdot |a_{n-1}/a_{n-2}| \cdot \cdots \cdot |a_{n_0+1}/a_{n_0}| \leq q^{n-n_0}.$$

Also gilt

$$|a_n| \leq (|a_{n_0}|/q^{n_0})q^n \text{ für alle } n > n_0.$$

Wiederum aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe folgt die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$.

(ii) Ab einem gewissen Index ist die Folge der positiven Zahlen $|a_n|$ monoton wachsend, also keine Nullfolge. Die Behauptung folgt daher aus 9.7. □

Spezialisierungen von 10.3 und 10.4 liefern die folgenden besonders leicht zu handhabenden Kriterien:

10.5 Korollar

Konvergiert $\sqrt[n]{|a_n|}$ oder $|a_{n+1}/a_n|$ ($a_n \neq 0$ für alle n) gegen einen Grenzwert kleiner 1 (größer 1), so ist die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ absolut konvergent (divergent).

Beweis. Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \to a < 1$ folgt für fast alle n

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q := a + \tfrac{1-a}{2}.$$

Wegen $q \in \,]0,1[$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nach 10.3(i). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \to a > 1$ folgt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle n und somit die Divergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nach 10.3(ii). Aus $|a_{n+1}/a_n| \to a < 1$ folgt für fast alle n

$$|a_{n+1}/a_n| \leq q := a + \tfrac{1-a}{2}.$$

Wegen $q \in \,]0,1[$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nach 10.4(i). Aus $|a_{n+1}/a_n| \to a > 1$ folgt $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ für fast alle n und somit die Divergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nach 10.4(ii). □

10.6 Beispiel

(i) Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ absolut konvergent .

Für $t = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $t \neq 0$ ist $a_n := \frac{t^n}{n!} \neq 0$ und

$$|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \tfrac{|t|}{n+1} \to 0.$$

Nach 10.5 ist also $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ absolut konvergent.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}(1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ ist konvergent.

Mit $a_n := (1/4^n)(1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{n})^n \underset{8.2}{\longrightarrow} \tfrac{e}{4} \underset{3.22}{<} 1.$$

Die absolute Konvergenz folgt daher nach 10.5.

Bei einer endlichen Summe kann man die Summanden in beliebiger Weise umordnen, ohne daß sich die Summe ändert. Bei unendlichen Reihen wird dies genau bei den absolut konvergenten Reihen der Fall sein (siehe 10.10).

10.7 Umordnung und unbedingte Konvergenz von Reihen

(i) Ist $(b_n)_{n\geq m}$ eine Umordnung von $(a_n)_{n\geq m}$ (d.h. $b_n = a_{\varphi(n)}$ mit einer bijektiven Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}^{\geq m} \to \mathbb{Z}^{\geq m}$, siehe 7.20), so heißt $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

(ii) Eine konvergente Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn sie bei einer beliebigen Umordnung konvergent bleibt und ihr Reihenwert sich nicht ändert. Die übrigen konvergenten Reihen heißen *bedingt konvergent*.

Wir zeigen nun zunächst, daß absolut konvergente Reihen unbedingt konvergent sind. Danach beweisen wir den Umordnungssatz von Riemann (1826–1866). Aus beiden Sätzen zusammen ergibt sich dann, daß eine Reihe genau dann absolut konvergent ist, wenn sie unbedingt konvergent ist.

10.8 Aus absoluter Konvergenz folgt unbedingte Konvergenz

Ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, dann ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ auch unbedingt konvergent.

Beweis. Sei $\sum_{k=m}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ eine Umordnung von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Setze

$$s_n := \sum_{k=m}^{n} a_k \text{ und } t_n := \sum_{k=m}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

Zu zeigen reicht (benutze 9.11):

(1) $$\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0.$$

Wähle hierzu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann gibt es, da $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist, ein $n_0 \in \mathbb{Z}^{\geq m}$ mit (siehe 9.6):

(2) $$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+\ell} |a_k| < \varepsilon \text{ für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Wähle nun $n_1 \geq n_0$ mit

(3) $$\{m, \ldots, n_0\} \subset \{\varphi(m), \ldots, \varphi(n_1)\}.$$

Sei $n \geq n_1$. Dann ist s_n eine Summe von Gliedern a_k, unter denen auf jeden Fall $a_m, \ldots, a_{n_0}$ auftreten.

Gleiches gilt wegen (3) dann auch für t_n. Die Differenz $s_n - t_n$ ist somit eine Summe von Gliedern $\pm a_k$ mit $k > n_0$. Also ist mit geeignetem $\ell \in \mathbb{N}$

$$|s_n - t_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_0+\ell} |a_k| \underset{(2)}{<} \varepsilon,$$

d.h. es gilt (1). □

10.9 Riemannscher Umordnungssatz

Sei $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Umordnung von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ mit Reihenwert a. Ferner gibt es divergente Umordnungen von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

Beweis. Setze $a_k^+ := \max(\{a_k, 0\})$ und $a_k^- := \max(\{-a_k, 0\})$. Dann sind $0 \le a_k^-, a_k^+$, und für alle k gilt:

(1) $$a_k = a_k^+ - a_k^-, \quad |a_k| = a_k^+ + a_k^-.$$

Wir zeigen zunächst:

(2) $(\sum_{k=m}^n a_k^+)_{n\ge m}, (\sum_{k=m}^n a_k^-)_{n\ge m}$ sind nicht nach oben beschränkt.

Wäre eine der beiden Folgen nach oben beschränkt und somit konvergent, so wäre wegen

$$\sum_{k=m}^n a_k^+ \underset{(1)}{=} \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n a_k^-, \qquad \sum_{k=m}^n a_k^- \underset{(1)}{=} \sum_{k=m}^n a_k^+ - \sum_{k=m}^n a_k$$

und der Konvergenz von $\sum_{k=m}^n a_k$ auch die andere Folge konvergent. Daher wäre dann auch

$$\sum_{k=m}^n |a_k| = \sum_{k=m}^n a_k^+ + \sum_{k=m}^n a_k^-$$

konvergent, im Widerspruch dazu, daß $\sum_{k=m}^\infty a_k$ nicht absolut konvergent ist. Dies beweist (2). Sei nun $(p_k)_{k\ge m}$ die Teilfolge aller a_k mit $a_k \ge 0$ und $(q_k)_{k\ge m}$ die Teilfolge aller $-a_k$ mit $a_k < 0$. Somit tritt jedes Glied von (a_k) in genau einer der Teilfolgen (p_k) und $(-q_k)$ auf. Die Folge (p_k) bzw. (q_k) entsteht also aus (a_k^+) bzw. (a_k^-) durch Streichen gewisser Nullen. Nach (2) gilt daher

(3) $(\sum_{k=m}^n p_k)_{n\ge m}, \quad (\sum_{k=m}^n q_k)_{n\ge m}$ sind nicht nach oben beschränkt.

Sei zunächst $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen: es gibt eine Umordnung von $\sum_{k=m}^\infty a_k$, die gegen a konvergiert. Nach (3) gibt es einen kleinsten Index $n_0 \ge m$ mit $s_0 := \sum_{k=m}^{n_0} p_k > a$. Weiterhin gibt es einen kleinsten Index $m_0 \ge m$ mit $t_0 := \sum_{k=m}^{n_0} p_k + \sum_{k=m}^{m_0}(-q_k) < a$ und dann wieder einen kleinsten Index $n_1 > n_0$ mit

(4) $$s_1 := \sum_{k=m}^{n_0} p_k + \sum_{k=m}^{m_0}(-q_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n_1} p_k > a.$$

Setzt man dieses Verfahren fort (dies ist wegen (3) möglich), so entsteht eine Reihe

(5) $$\begin{aligned}&(p_m + p_{m+1} + \ldots + p_{n_0}) + ((-q_m) + \ldots + (-q_{m_0}))+\\ &\quad +(p_{n_0+1} \ldots + p_{n_1}) + ((-q_{m_0+1}) + \ldots,\end{aligned}$$

die eine Umordnung der Ausgangsreihe darstellt.

Nach Konstruktion gilt für $\ell \in \mathbb{N}$ (da n_0 minimal gewählt ist, folgt das zweite Ungleichungszeichen):

(6) $$0 < s_\ell - a \le p_{n_\ell},$$

(7) $$0 < a - t_\ell \le q_{m_\ell}.$$

Da $\sum_{k=m}^\infty a_k$ konvergent ist, gilt $|a_k| \to 0$. Also gilt auch für die Teilfolgen $(p_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ und $(q_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}_0}$:

(8) $$p_{n_\ell} \to 0, \quad q_{m_\ell} \to 0.$$

Somit gibt es zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein ℓ_0, so daß für alle $\ell \ge \ell_0$ gilt:

$$a - \varepsilon \underset{(7),(8)}{<} t_\ell \underset{(7)}{<} a \underset{(6)}{<} s_\ell \underset{(6),(8)}{<} a + \varepsilon.$$

Teilsummen der umgeordneten Reihe (5) liegen nun für große Indizes zwischen t_ℓ und s_ℓ für ein geeignetes $\ell \ge \ell_0$. Also konvergiert die umgeordnete Reihe gegen a.

Zum Nachweis der Existenz einer divergenten Umordnung von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ wähle $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, so daß

$$\begin{aligned} p_m + p_{m+1} + \ldots + p_{n_0} &> 1 + q_m \\ p_m + p_{m+1} + \ldots + p_{n_1} &> 2 + q_m + q_{m+1} \\ p_m + p_{m+1} + \ldots + p_{n_k} &> k + q_m + q_{m+1} + \ldots + p_{m+k}. \end{aligned}$$

Dies ist wegen (3) möglich. Die Reihe

$$p_m + \ldots + p_{n_1} + (-q_m) + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_2} + (-q_{m+1}) + p_{n_2+1} + \ldots$$

ist eine Umordnung von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Diese Umordnung ist divergent, da die Teilsumme mit letztem Glied q_{m+k-1} größer als k ist. □

10.10 Äquivalenzen zur absoluten Konvergenz

Sei $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:

(i) $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

(ii) $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ ist unbedingt konvergent.

(iii) Jede Umordnung von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Beweis. ***(i)*** $\Rightarrow$ ***(ii)*** nach 10.8; aus (ii) folgt natürlich (iii).

(iii) $\Rightarrow$ ***(i)*** Zunächst ist die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent. Wäre nun $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent, dann gäbe es nach dem Riemannschen Umordnungssatz 10.9 eine divergente Umordnung im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Aus 10.10 folgt auch:

Ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung absolut konvergent.

(Wende 10.1(i) $\Rightarrow$ (iii) auf $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ an).

10.11 Cauchy-Produkt

Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$ absolut konvergent, und es gilt für die Reihenwerte:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big).$$

Beweis. Setze $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ folgt aus (benutze 9.5):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} |c_n| &\leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \leq \Big(\sum_{k=0}^{m} |a_k|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\Big) \\ &\leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\Big). \end{aligned}$$

Für den Beweis über die Gleichheit der Reihenwerte setze:

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad b := \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Zu zeigen ist mit $d_m := \sum_{n=0}^{m} c_n$

(1) $$\lim_{m\to\infty} d_m = a \cdot b.$$

Setze für $m \in \mathbb{N}_0$
$$e_m := (\sum_{i=0}^{m} a_i)(\sum_{j=0}^{m} b_j).$$

Nun ist (benutze 7.18(iii)) $\lim_{m\to\infty} e_m = a \cdot b$. Zum Nachweis von (1) reicht es daher zu zeigen:

(2) $$\lim_{m\to\infty}(e_m - d_m) = 0.$$

Nun ist:

(3) $$\begin{cases} |e_m - d_m| & = & |\sum_{i,j=0}^{m} a_i b_j - \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}| \\ & \leq & \sum_{i,j=0;\, i+j>m}^{m} |a_i b_j|. \end{cases}$$

Ferner ist
$$f_m := (\sum_{i=0}^{m} |a_i|)(\sum_{j=0}^{m} |b_j|) = \sum_{i,j=0}^{m} |a_i \cdot b_j|$$

als Produkt zweier nach Voraussetzung konvergenter Folgen selbst konvergent.

Zum Nachweis von (2) sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gewählt. Dann gibt es ein m_0 mit

(4) $$|f_m - f_{m_0}| < \varepsilon \text{ für alle } m > m_0$$

(benutze 8.5). Somit gilt für $m > 2m_0$
$$|e_m - d_m| \underset{(3)}{\leq} \sum_{i,j=0;\, i+j>m}^{m} |a_i b_j| \leq \sum_{i,j=0;\, i \text{ oder } j>m_0}^{m} |a_i b_j| \leq f_m - f_{m_0} \underset{(4)}{<} \varepsilon;$$

also ist (2) bewiesen. □

Als Anwendung des Cauchy-Produkts weisen wir die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion nach.

10.12 Die Exponentialfunktion und ihre Funktionalgleichung

Nach 10.6 existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$
$$exp(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Für die Exponentialfunktion exp gilt:
$$exp(s+t) = exp(s) \cdot exp(t) \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wende 10.11 auf die nach 10.6 absolut konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ an:
$$exp(s) \cdot exp(t) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}) \underset{10.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} s^k \frac{1}{(n-k)!} t^{n-k})$$
$$\underset{3.18(\text{iii})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k}) \underset{3.19}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s+t)^n = exp(s+t).$$ □

Also Korollar erhalten wir hieraus einige Eigenschaften der Exponentialfunktion.

10.13 Einfache Eigenschaften der Exponentialfunktion

(i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $exp(t) > 0$.

(ii) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $exp(-t) = (exp(t))^{-1}$.

(iii) Es ist $exp(0) = 1, \quad exp(1) = e$.

Beweis. ***(ii)*** Es ist $exp(t) \cdot exp(-t) \underset{10.12}{=} exp(0) = 1$. Insbesondere ist daher $exp(t) \neq 0$, und es folgt ferner $exp(-t) = (exp(t))^{-1}$.

(i) Für jedes $t \geq 0$ ist $exp(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots \geq 1 > 0$. Ist $t < 0$, so ist $-t > 0$ und somit $exp(-t) > 0$. Also ist $exp(t) \underset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{exp(-t)} > 0$.

(iii) Es ist $exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ und $exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underset{9.4}{=} e$. □