Die Quadratur des Kreises

http://www.mi.uni-koeln.de/~ugoertz/

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Gegeben sei eine Menge von Punkten in der Ebene. Dann sind die folgenden Schritte erlaubt, um neue Punkte zu konstruieren:

- Verbinde 2 bereits konstruierte Punkte durch eine Gerade
- Zeichne einen Kreis um einen bereits konstruierten Punkt, mit Radius = Abstand zweier bereits konstruierter Punkte
- Füge den Schnittpunkt zweier Geraden/die Schnittpunkte einer Gerade mit einem Kreis/die Schnittpunkte zweier Kreise zu der Menge der bereits konstruierten Punkte hinzu

Beispiele

- Mittelpunkt einer Strecke

- gleichseitiges Dreieck, Quadrat, regelmässiges Fünfeck

Frage: Quadratur des Kreises

Gegeben sei ein Kreis (durch den Mittelpunkt und einen Punkt auf dem Kreis). Lässt sich dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie der Kreis?

Historische Bemerkungen

Näherungslösungen werden schon im Papyrus Rhind beschrieben (ca. 1700 v. Chr.)

Antiphon 430 v. Chr., Aristoteles 350 v. Chr., Archimedes 250 v. Chr., ...

Ergebnis:

- Keine exakte Lösungsmöglichkeit gefunden
- Näherungslösung mit Zirkel und Lineal
- Exakte Lösung mit anderen Methoden

Vermutung: Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich.

Wie kann man beweisen, dass ein Konstruktionsproblem **nicht** lösbar ist?

Algebraisierung des Problems

Punkte gegeben durch ihre Koordinaten: $P = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Geraden gegeben durch Gleichung $ax + by = c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ (nicht $a = b = 0$) d.h. $G = \{(x, y); ax + by = c\}$.

Beispiel: Gerade durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist gegeben durch

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Kreise gegeben durch Gleichung $(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2 = r^2$ (Mittelpunkt (x_M, y_M), Radius r).

Beispiel: Der Einheitskreis ist gegeben durch $x^2 + y^2 = 1$.

Frage: Welche reellen Zahlen können als Koordinaten konstruierbarer Punkte auftreten?

I. Schnittpunkt zweier Geraden
Zwei (nicht-parallele) Geraden $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ schneiden sich in $(\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1})$.

II. Schnittpunkt(e) einer Gerade und eines Kreises
Gegeben seien eine Gerade $ax + y = c$ und ein Kreis $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Liegt der Punkt (x_0, y_0) auf der Gerade und dem Kreis, so gilt

$$r^2 = (x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2 = (x_0 - x_M)^2 + (-ax_0 + c - y_M)^2,$$

d.h. wir erhalten eine quadratische Gleichung für x_0.

III. Schnittpunkt(e) zweier Kreise Ähnlich wie II.

Die Koordinaten eines neu konstruierten Punktes erfüllen eine quadratische (oder lineare) Gleichung, deren Koeffizienten aus Koordinaten bereits konstruierter Punkte gebildet sind.

Satz *Die Koordinaten eines konstruierbaren Punktes (ausgehend von (0,0) und (1,0)) sind Nullstellen eines Polynoms* $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ *mit Koeffizienten* $a_i \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$.

Beispiel
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $(x-a)^2 = b$, $a \in \mathbb{Q}$, $b = \sqrt{b'}$, $b' \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Dann ist $(x-a)^4 - b^2 = 0$, und wir erhalten eine Gleichung für x mit rationalen Koeffizienten.

Zurück zur Quadratur des Kreises.

Ohne Einschränkung: Gegeben als Mittelpunkt der Punkt $(0,0)$, und als Punkt auf dem Kreis der Punkt $(1,0)$. Der zugehörige Kreis hat Radius 1 und Flächeninhalt π.

Wir müssen also ein Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ konstruieren.

Um die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass $\sqrt{\pi}$ nicht Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ ist.

Satz (Hermite-Lindemann, 1882) *Die Zahl π ist transzendent, d. h. es gibt kein Polynom ($\neq 0$) mit rationalen Zahlen als Koeffizienten, das π als Nullstelle hat.*

Daraus folgt, dass $\sqrt{\pi}$ ebenfalls transzendent ist.

Der Satz von Hermite-Lindemann beweist also, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

Der Beweis des Satzes ist mit Methoden der Schulmathematik möglich, aber nicht einfach.

Wir beweisen den folgenden, einfacheren

Satz (Lambert, 1761) $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$, insbesondere $\pi, \sqrt{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis (nach I. Niven, 1947).

Angenommen, $\pi^2 = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$.

Sei $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$, und sei

$$\begin{aligned} F(x) &= b^n \Big[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\Big] \end{aligned}$$

Dann sind $F(0)$ und $F(1)$ ganze Zahlen.

Sei nun $G(x) = F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x$.

Dann ist

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F''(x) + \pi^2 F(x)) \sin \pi x \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin \pi x = \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} I &:= \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x \; dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{\pi} F(1) + \frac{1}{\pi} F(0) \right) = F(0) + F(1) \end{aligned}$$

eine ganze Zahl.

Andererseits gilt für alle x, $0 < x < 1$, dass $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$, also folgt $0 < I < \frac{a^n \pi}{n!} < 1$. Widerspruch!

Genauer sehen wir nun: aus Näherungen für π erhalten wir Näherungslösungen zur Quadratur des Kreises.

Andere unlösbare Konstruktionsprobleme

- Verdoppelung des Würfels
- Konstruktion eines regelmässigen Siebenecks