Littelmanns Wegemodell
und Brownsche Bewegung

Littelmanns Wegemodell und Brownsche Bewegung

P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. Math. **142** (1995), 499–525.

P. Biane, P. Bougerol, N. O'Connell, *Littelmann paths and Brownian paths*, Duke Math. J. **130** vol. 1 (2005), 127–167.

V endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\alpha \in V$, $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\alpha^\vee(\alpha) = 2$.

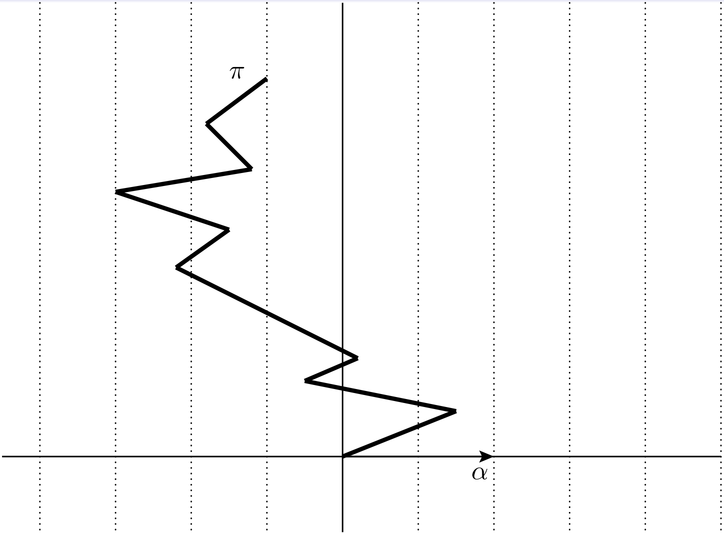
Sei $\Pi_0 = \{\pi : [0,1] \longrightarrow V$ stetig, $\pi(0) = 0\ \}$.

V endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\alpha \in V$, $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\alpha^\vee(\alpha) = 2$.

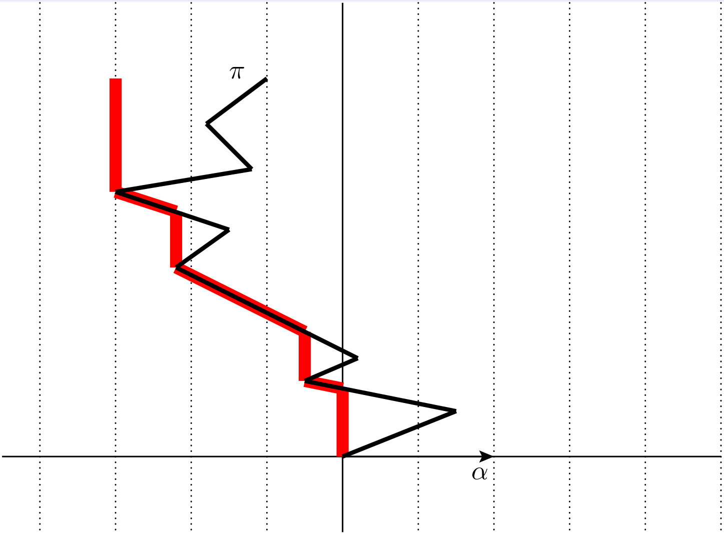
Sei $\Pi_0 = \{\pi : [0,1] \longrightarrow V \text{ stetig}, \pi(0) = 0 \}$.

Pitman-Operator (nach Biane, Bougerol, O'Connell):

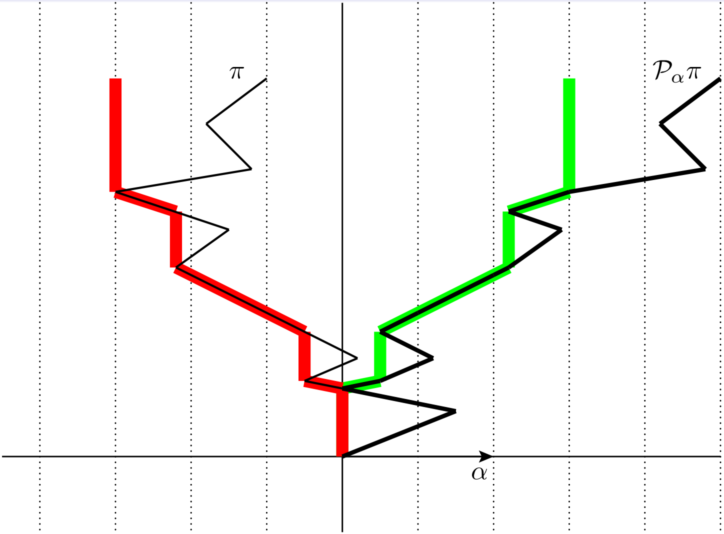
$$\mathcal{P}_\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_0$$
$$(\mathcal{P}_\alpha \pi)(t) = \pi(t) - \left(\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \right) \alpha$$



$$(\mathcal{P}_\alpha \pi)(t) = \pi(t) - \left(\inf_{0 \le s \le t} \alpha^\vee(\pi(s)) \right) \alpha$$



$$(\mathcal{P}_\alpha \pi)(t) = \pi(t) - \left(\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \right) \alpha$$



$$(\mathcal{P}_\alpha \pi)(t) = \pi(t) - \left(\inf_{0 \le s \le t} \alpha^\vee(\pi(s)) \right) \alpha$$

Littelmann-Operatoren: $e_\alpha, f_\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_0 \cup \{0\}$.

Littelmann-Operatoren: $e_\alpha, f_\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_0 \cup \{0\}$.

Sei $\pi \in \Pi_0$. Ist $m := \min_t \alpha^\vee(\pi(t)) > -1$, so setze $e_\alpha \pi = 0$. Andernfalls sei

$$\begin{aligned} t_1 &= \min\{t;\ \alpha^\vee(\pi(t)) = m\}, \\ t_0 &= \min\{t;\ \alpha^\vee(\pi(t)) = m+1\}. \end{aligned}$$

Littelmann-Operatoren: $e_\alpha, f_\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_0 \cup \{0\}$.

Sei $\pi \in \Pi_0$. Ist $m := \min_t \alpha^\vee(\pi(t)) > -1$, so setze $e_\alpha \pi = 0$. Andernfalls sei

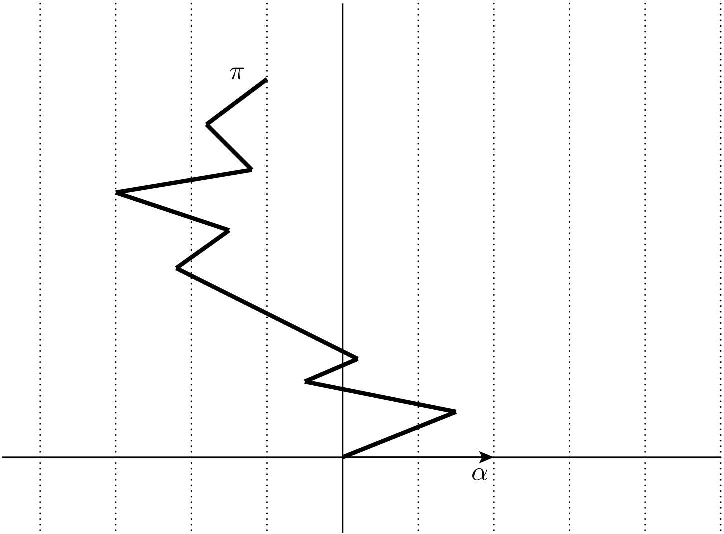
$$\begin{aligned} t_1 &= \min\{t;\ \alpha^\vee(\pi(t)) = m\}, \\ t_0 &= \min\{t;\ \alpha^\vee(\pi(t)) = m+1\}. \end{aligned}$$

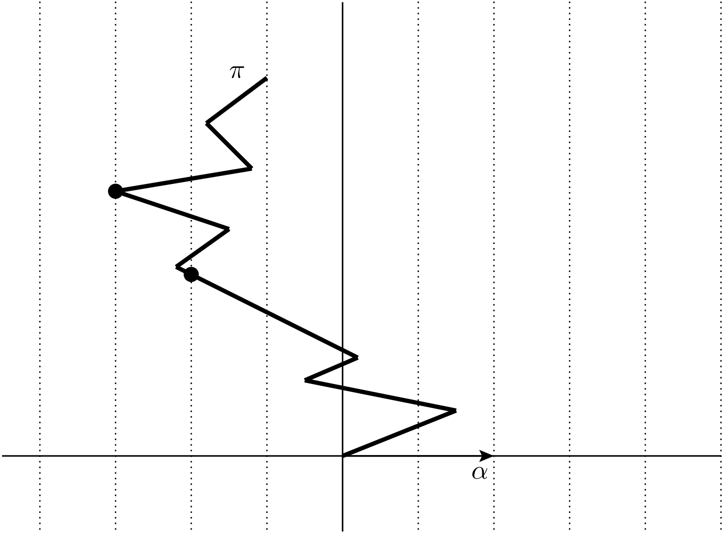
Schreibe π als Verkettung $\pi = \pi_1 * \pi_2 * \pi_3$ mit

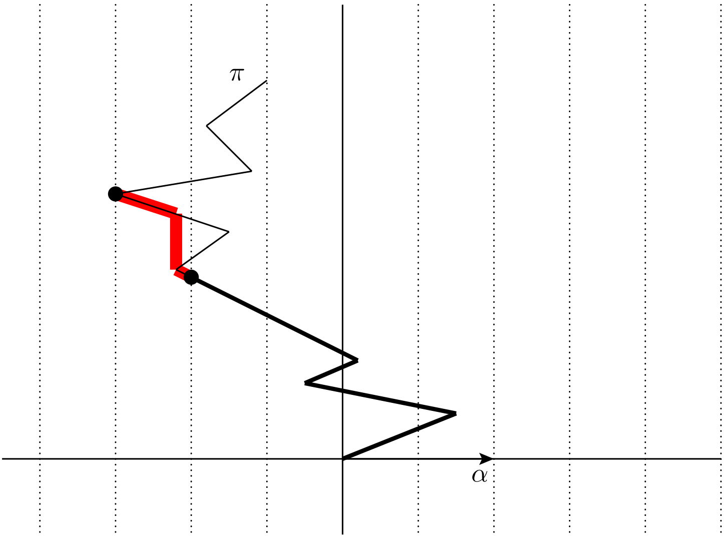
$$\begin{array}{ll} \pi_1 : [0, t_0] \to V, & \pi_1(t) = \pi(t), \\ \pi_2 : [0, t_1 - t_0] \to V, & \pi_2(t) = \pi(t - t_0) - \pi(t_0), \\ \pi_3 : [0, 1 - t_1] \to V, & \pi_3(t) = \pi(t - t_1) - \pi(t_1), \end{array}$$

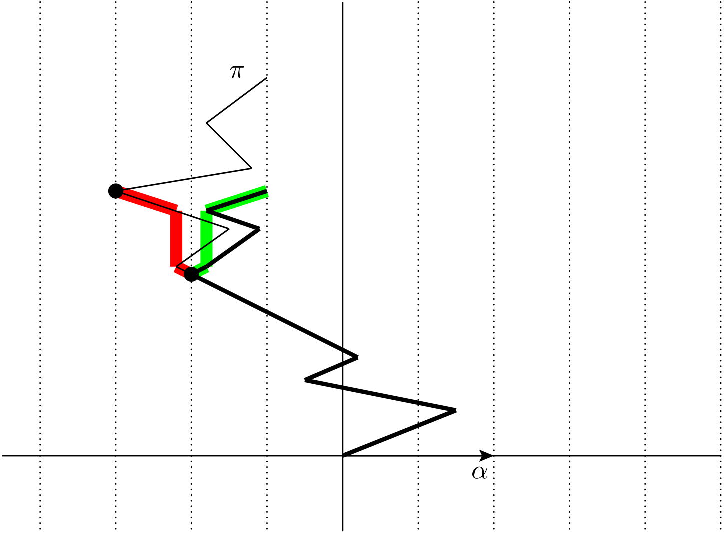
und setze

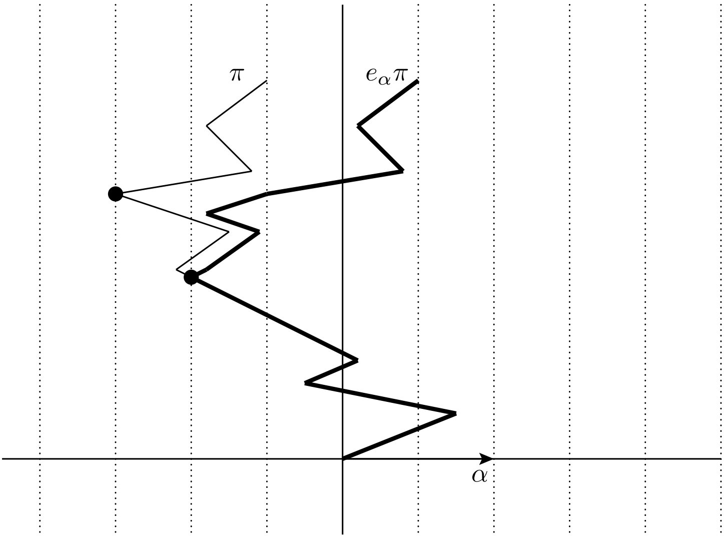
$$e_\alpha \pi = \pi_1 * (\mathcal{P}_\alpha \pi_2) * (\pi_3 + \alpha).$$

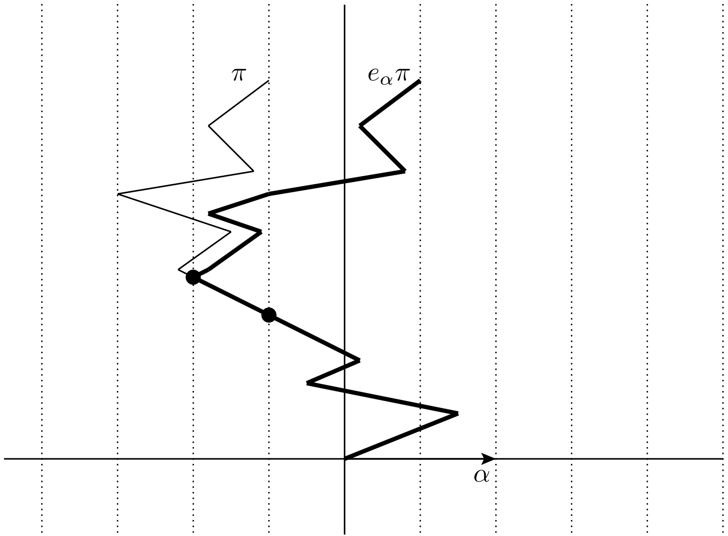

π
α

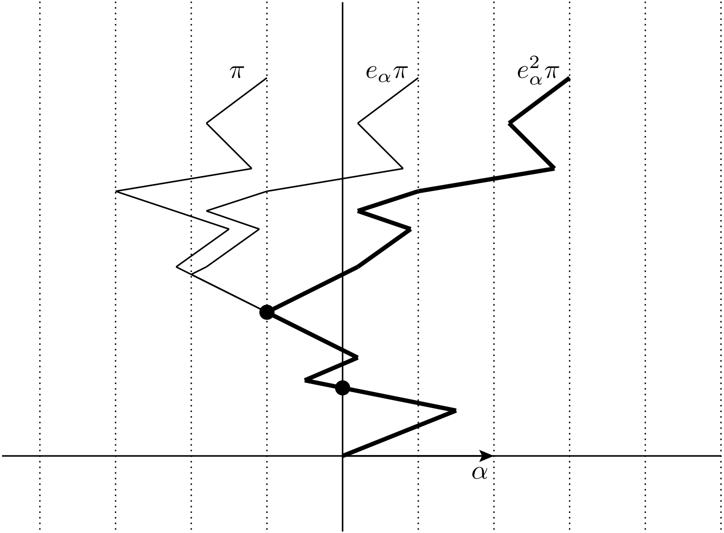

π
α

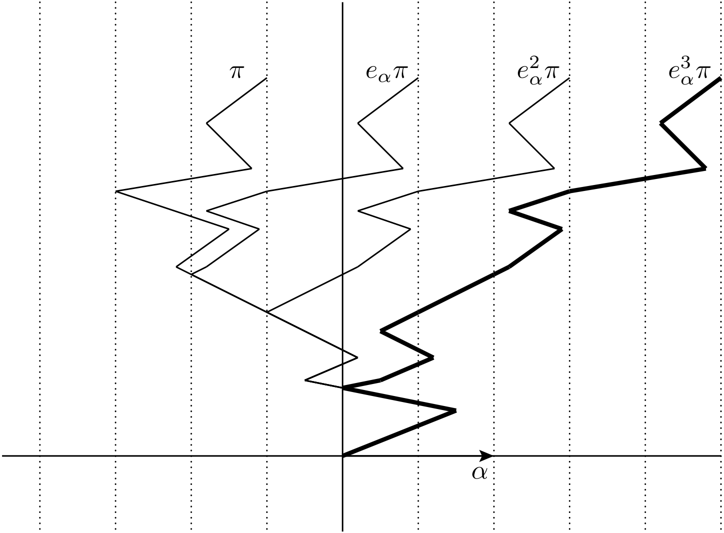

π
α


π
α


π
$e_\alpha \pi$
α


π
$e_\alpha \pi$
α


π
$e_\alpha \pi$
$e_\alpha^2 \pi$
α


π
$e_\alpha \pi$
$e_\alpha^2 \pi$
$e_\alpha^3 \pi$
α

Lemma

Ist $\min_t \alpha^\vee(\pi(t)) \in \mathbb{Z}$, *so ist*

$$\mathcal{P}_\alpha \pi = e_\alpha^n \pi,$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *maximal mit* $e_\alpha^n \pi \neq 0$ *(d. h.* $n = |\min_t \alpha^\vee(\pi(t))|$*).*

Lemma

Ist $\min_t \alpha^\vee(\pi(t)) \in \mathbb{Z}$*, so ist*

$$\mathcal{P}_\alpha \pi = e_\alpha^n \pi,$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *maximal mit* $e_\alpha^n \pi \neq 0$ *(d. h.* $n = |\min_t \alpha^\vee(\pi(t))|$*).*

Der Operator $f_\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_0 \cup \{0\}$ ist ähnlich definiert; es gilt:

Satz

- $e_\alpha \pi \neq 0 \Longrightarrow f_\alpha e_\alpha \pi = \pi$
- $f_\alpha \pi \neq 0 \Longrightarrow e_\alpha f_\alpha \pi = \pi$

G eine einf. zushgd. halbeinfache komplexe Lie-Gruppe,
$T \subseteq B \subseteq G$ ein maximaler Torus und eine Borel-Untergruppe,
$W = N_G(T)/T$ die Weylgruppe.

Beispiel: $SL_n \supseteq \{\text{obere Dreiecksmatrizen}\} \supseteq \{\text{Diagonalmatrizen}\}$.
Dann $W \cong S_n$.

G eine einf. zushgd. halbeinfache komplexe Lie-Gruppe,
$T \subseteq B \subseteq G$ ein maximaler Torus und eine Borel-Untergruppe,
$W = N_G(T)/T$ die Weylgruppe.

Beispiel: $SL_n \supseteq \{\text{obere Dreiecksmatrizen}\} \supseteq \{\text{Diagonalmatrizen}\}$.
Dann $W \cong S_n$.

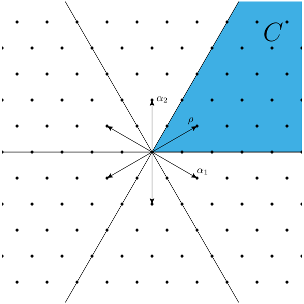
Zugehöriges Wurzelsystem:

Gewichtsgitter $\Lambda = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$.
$V := \Lambda \otimes \mathbb{R}$ mit W-inv. SP $(\cdot, \cdot)$.

Wurzeln: $\alpha \in V$, Kowurzeln: $\alpha^\vee \in V^*$.
Einfache Wurzeln: Δ.

Dominante Weylkammer
$C = \{v \in V;\ \alpha^\vee(v) > 0\ \forall \alpha \in \Delta\}$.

Dominante Gewichte: $\Lambda^+ = \Lambda \cap \overline{C}$.



$G = SL_3$

Darstellungen

Betrachte Darstellungen $G \longrightarrow GL(E)$, (E endl.-dim. $\mathbb{C}$-VR).
Haben Gewichtszerlegung $E = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} E(\mu)$,

$$E(\mu) = \{x \in E;\ \forall t \in T : t \cdot x = \mu(t)x\}.$$

Darstellungen

Betrachte Darstellungen $G \longrightarrow GL(E)$, (E endl.-dim. $\mathbb{C}$-VR).
Haben Gewichtszerlegung $E = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} E(\mu)$,

$$E(\mu) = \{x \in E;\ \forall t \in T : t \cdot x = \mu(t)x\}.$$

Theorem

$$(\textit{Irred. Darstellungen}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Lambda^+$$

Bezeichne die irreduzible Darstellung zu $\lambda \in \Lambda^+$ mit V_λ und schreibe $m_\lambda(\mu) = \dim V_\lambda(\mu)$.

Darstellungen

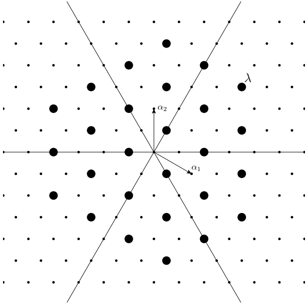
Betrachte Darstellungen $G \longrightarrow GL(E)$, (E endl.-dim. $\mathbb{C}$-VR).
Haben Gewichtszerlegung $E = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} E(\mu)$,

$$E(\mu) = \{x \in E;\ \forall t \in T : t \cdot x = \mu(t)x\}.$$

Theorem

$$(\textit{Irred. Darstellungen}) \xleftrightarrow{1:1} \Lambda^+$$

Bezeichne die irreduzible Darstellung zu $\lambda \in \Lambda^+$ mit V_λ und schreibe $m_\lambda(\mu) = \dim V_\lambda(\mu)$.



Darstellungen

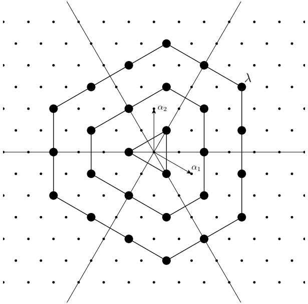
Betrachte Darstellungen $G \longrightarrow GL(E)$, (E endl.-dim. $\mathbb{C}$-VR).
Haben Gewichtszerlegung $E = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} E(\mu)$,

$$E(\mu) = \{x \in E;\ \forall t \in T : t \cdot x = \mu(t)x\}.$$

Theorem

$$(\textit{Irred. Darstellungen}) \xleftrightarrow{1:1} \Lambda^+$$

Bezeichne die irreduzible Darstellung zu $\lambda \in \Lambda^+$ mit V_λ und schreibe $m_\lambda(\mu) = \dim V_\lambda(\mu)$.



Schreibe $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha \in \Lambda$.

Theorem (Weylsche Charakterformel)

$$\sum_{\mu\in\Lambda} m_\lambda(\mu) e(\mu) = \frac{\sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w) e(w(\lambda+\rho))}{\sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w) e(w\rho)} \qquad (\text{in } \mathbb{Z}[\Lambda]).$$

Schreibe $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha \in \Lambda$.

Theorem (Weylsche Charakterformel)

$$\sum_{\mu \in \Lambda} m_\lambda(\mu) e(\mu) = \frac{\sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e(w(\lambda + \rho))}{\sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e(w\rho)} \qquad (in\ \mathbb{Z}[\Lambda]).$$

Schreiben wir $V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu V_\nu^{\oplus c_{\lambda,\mu}^\nu}$, so gilt

Theorem (Kostant, Steinberg)

$$c_{\lambda,\mu}^\nu = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) m_\lambda(w(\nu + \rho) - (\mu + \rho)).$$

Sei $\pi \in \Pi_0$ *dominant*, d. h. $\pi([0,1]) \subseteq \overline{C}$, und stückweise linear mit rationalen Bruchpunkten (SLR). Sei $\pi(1) = \lambda \in \Lambda^+$.

Theorem (Littelmann)

Sei $\mathbb{B}_\pi$ die Menge der Pfade, die aus π durch sukzessive Anwendung der Operatoren e_α und f_α für einfache Wurzeln α entstehen. Dann gilt $\eta(1) \in \Lambda$ für alle $\eta \in \mathbb{B}_\pi$ und

$$m_\lambda(\mu) = \#\{\eta \in \mathbb{B}_\pi;\ \eta(1) = \mu\}.$$

Sei $\pi \in \Pi_0$ *dominant*, d. h. $\pi([0,1]) \subseteq \overline{C}$, und stückweise linear mit rationalen Bruchpunkten (SLR). Sei $\pi(1) = \lambda \in \Lambda^+$.

Theorem (Littelmann)

Sei $\mathbb{B}_\pi$ die Menge der Pfade, die aus π durch sukzessive Anwendung der Operatoren e_α und f_α für einfache Wurzeln α entstehen. Dann gilt $\eta(1) \in \Lambda$ für alle $\eta \in \mathbb{B}_\pi$ und

$$m_\lambda(\mu) = \#\{\eta \in \mathbb{B}_\pi;\ \eta(1) = \mu\}.$$

Theorem (Littelmann)

Sei π wie oben, und sei π' dominant, SLR, mit $\pi'(1) = \mu \in \Lambda^+$.

$$c^\nu_{\lambda,\mu} = \#\{\gamma \in \Pi_0;\ \gamma \textit{ dominant},\ \ \exists \eta \in \mathbb{B}_{\pi'} : \gamma = \pi \star \eta,\ \gamma(1) = \nu\}$$

Eigenschaften der Pitman-Operatoren

Die Weyl-Gruppe W wird erzeugt von den einfachen Spiegelungen s_α (Spiegelung in $\ker(\alpha^\vee)$), $\alpha \in \Delta$.

Satz (Biane, Bougerol, O'Connell)

Für $w \in W$ hängt der Operator $\mathcal{P}_w := \mathcal{P}_{\alpha_{i_1}} \cdots \mathcal{P}_{\alpha_{i_\ell}}$, $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ eine reduzierte Darstellung, nicht von der Wahl der reduzierten Darstellung ab.

Eigenschaften der Pitman-Operatoren

Die Weyl-Gruppe W wird erzeugt von den einfachen Spiegelungen s_α (Spiegelung in $\ker(\alpha^\vee)$), $\alpha \in \Delta$.

Satz (Biane, Bougerol, O'Connell)

Für $w \in W$ hängt der Operator $\mathcal{P}_w := \mathcal{P}_{\alpha_{i_1}} \cdots \mathcal{P}_{\alpha_{i_\ell}}$, $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ eine reduzierte Darstellung, nicht von der Wahl der reduzierten Darstellung ab.

Satz

Sei $w_0 \in W$ das eindeutig bestimmte Element maximaler Länge. Dann gilt

$$(\mathcal{P}_{w_0}\pi)(t) \in \overline{C} \text{ für alle } \pi, t.$$

Brownsche Bewegung in Weyl-Kammern

- Brownsche Bewegung B in V. Übergangsdichten

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\dim V/2}} \exp\left(-\frac{(y-x,y-x)}{2t}\right), \qquad x,y \in V.$$

Brownsche Bewegung in Weyl-Kammern

- Brownsche Bewegung B in V. Übergangsdichten

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\dim V/2}} \exp\left(-\frac{(y-x,y-x)}{2t}\right), \qquad x,y \in V.$$

- Am Rand von C "getötete" Brownsche Bewegung:

$$p_t^0(x,y) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) p_t(x, wy).$$

Brownsche Bewegung in Weyl-Kammern

- Brownsche Bewegung B in V. Übergangsdichten

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\dim V/2}} \exp\left(-\frac{(y-x, y-x)}{2t}\right), \qquad x, y \in V.$$

- Am Rand von C "getötete" Brownsche Bewegung:

$$p_t^0(x, y) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) p_t(x, wy).$$

- Übergangsdichten der Brownschen Bewegung in $\overline{C}$:

$$q_t(x, y) = \frac{h(y)}{h(x)} p_t^0(x, y)$$

wobei $h(x) = \prod_{\alpha > 0} \alpha^\vee(x)$.

Theorem (Biane, Bougerol, O'Connell)

Sei B eine Brownsche Bewegung in V. Dann ist $\mathcal{P}_{w_0} B$ eine Brownsche Bewegung in $\overline{C}$.

Theorem (Biane, Bougerol, O'Connell)

Sei B eine Brownsche Bewegung in V. Dann ist $\mathcal{P}_{w_0}B$ eine Brownsche Bewegung in $\overline{C}$.

Wir beweisen eine diskrete Version des Theorems.

Fixiere $\lambda \in \Lambda^+ \setminus \{0\}$.

Sei $(X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ die Irrfahrt in Λ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(\mu,\nu) = \frac{m_\lambda(\nu-\mu)}{\dim V_\lambda}, \qquad \mu,\nu \in \Lambda.$$

Definiere ferner Übergangswahrscheinlichkeiten

$$q(\mu,\nu) = \frac{\dim V_\nu}{\dim V_\mu} \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w) p(\mu+\rho, w(\nu+\rho)) = \frac{\dim V_\nu}{\dim V_\lambda \dim V_\mu} c^{\nu}_{\lambda,\mu}.$$

Sei π ein dominanter SLR Weg mit $\pi(1) = \lambda$.

Seien η_i, $i \in \mathbb{N}$, unabh. identisch Laplace-verteilte Elemente in $\mathbb{B}_\pi$.

Sei Z der stochastische Prozess

$$Z(t) = \eta_1(1) + \cdots + \eta_{n-1}(1) + \eta_n(t-n), \quad \text{falls } t \in [n, n+1].$$

Sei π ein dominanter SLR Weg mit $\pi(1) = \lambda$.

Seien η_i, $i \in \mathbb{N}$, unabh. identisch Laplace-verteilte Elemente in $\mathbb{B}_\pi$.

Sei Z der stochastische Prozess

$$Z(t) = \eta_1(1) + \cdots + \eta_{n-1}(1) + \eta_n(t-n), \quad \text{falls } t \in [n, n+1].$$

Satz

Der stochastische Prozess $(\mathcal{P}_{w_0} Z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Markov-Kette in Λ^+ mit Übergangswahrscheinlichkeiten q.

Sei π ein dominanter SLR Weg mit $\pi(1) = \lambda$.

Seien η_i, $i \in \mathbb{N}$, unabh. identisch Laplace-verteilte Elemente in $\mathbb{B}_\pi$.

Sei Z der stochastische Prozess

$$Z(t) = \eta_1(1) + \cdots + \eta_{n-1}(1) + \eta_n(t-n), \quad \text{falls } t \in [n, n+1].$$

Satz

Der stochastische Prozess $(\mathcal{P}_{w_0} Z(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Markov-Kette in Λ^+ mit Übergangswahrscheinlichkeiten q.

Für $\gamma_i \in \mathbb{B}_\pi$, $\mu = (\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n)(n)$ gilt

$$P(\mathcal{P}_{w_0} Z(n+1) = \nu | \mathcal{P}_{w_0} Z_{|[0,n]} = \gamma_1 * \cdots * \gamma_n) = \frac{\dim V_\nu}{\dim V_\lambda \dim V_\mu} c^{\nu}_{\lambda,\mu}.$$