## Lineare Algebra II — Klausur

**Aufgabe 1** (5+5+5 Punkte)

a) Sei $K$ ein Körper, sei $V$ ein $K$-Vektorraum, und sei $U$ ein Unterraum von $V$. Wie lautet die universelle Eigenschaft des Quotienten von $V$ nach $U$?

b) Gib einen kommutativen Ring mit 1 an, der nicht der Nullring ist und kein Integritätsbereich ist. (Begründung!)

c) Berechne $22^{99} \mod 17$ (d.h. bestimme $a \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a \leq 16$ und $22^{99} \equiv a \mod 17$)

**Aufgabe 2** (6+8 Punkte)

a) Von einer Matrix $A \in M_{5\times5}(\mathbb{C})$ sei bekannt: $\mathrm{charpol}_A = (X-4)^3(X+3)^2$ und $\mathrm{minpol}_A = (X-4)(X+3)^2$. Bestimme die Jordansche Normalform von $A$. (Begründung!)

b) Ist allgemein für $B \in M_{5\times5}(\mathbb{C})$ die Jordansche Normalform von $B$ bereits durch das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von $B$ eindeutig bestimmt? (Beweis bzw. Gegenbeispiel mit Begründung!)

**Aufgabe 3** (14 Punkte)

Sei $K$ ein Körper, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, sei $\lambda \in K$, und seien $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$ Matrizen aus $M_{n\times n}(K)$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $a_{ij} = b_{ij} = 0$ falls $i > j$,

ii) $a_{ii} = b_{ii} = \lambda$ für alle $i$,

iii) $a_{ij} \neq 0$ und $b_{ij} \neq 0$ falls $j = i+1$.

Zeige, daß $A$ und $B$ ähnlich zueinander sind (d.h. es gibt $S \in GL_n(K)$ mit $B = S^{-1}AS$).

**Aufgabe 4** (5+10 Punkte)

a) Gib eine natürliche Zahl $n$ und eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ an, die nicht trigonalisierbar ist. (Begründung!)

b) Gib eine natürliche Zahl $n$ und eine Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ an, die diagonalisierbar ist, aber nicht normal ist. (Begründung!)

**Aufgabe 5** (12 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^5$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Sei $U$ der von den folgenden Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4$ aufgespannte Unterraum von $V$.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Orthonormalbasis von $U$.

bitte wenden

**Aufgabe 6** (15 Punkte)

Sei $V$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f$ ein Endomorphismus von $V$. Sei $f^*$ die adjungierte Abbildung zu $f$. Zeige, daß $\ker(f) = \ker(f^* \circ f)$.

**Aufgabe 7** (15 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$, die bezüglich der Standardbasen durch die folgende Matrix $A$ gegeben ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sei $f_A^\vee$ die duale Abbildung zu $f_A$. Gib ein Element $\lambda \in \ker(f_A^\vee) \setminus \{0\}$ an. (Begründung!)