Lineare Algebra II — Lösung zur Klausur

Aufgabe 1

a) Sei $\pi : V \to V/U$ die kanonische Projektion. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $p : V \to W$ von K-Vektorräumen mit $U \subseteq \ker p$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $q : V/U \to W$ mit $p = q \circ \pi$.

b) Ein Beispiel ist $\mathbb{Z}/(4)$. Denn es gilt in $\mathbb{Z}/(4)$, daß $2 \neq 0$, aber $2 \cdot 2 = 0$.

c) Es gilt $22 \equiv 5 \mod 17$. Weiter ist $5^2 \equiv 8 \mod 17$, also $5^4 \equiv 64 \equiv -4 \mod 17$, also $5^8 \equiv (-4)^2 \equiv -1 \mod 17$. Also ist $22^{99} \equiv 5^{99} \equiv 5^{8 \cdot 12} \cdot 5^3 \equiv (-1)^{12} \cdot 125 \equiv 6 \mod 17$. (Alternativ folgt auch aus dem kleinen Satz von Fermat, daß $5^{16} \equiv 1 \mod 17$, also auch $5^{96} \equiv 1 \mod 17$, also $5^{99} \equiv 5^3 \equiv 6 \mod 17$.)

Aufgabe 2 a) Aus $\mathrm{charpol}_A = (X-4)^3(X+3)^2$ folgt, daß A nur die Eigenwerte -3 und 4 hat. Aus $\mathrm{minpol}_A = (X-4)(X+3)^2$ folgt, daß alle Jordanblöcke zum Eigenwert 4 die Größe 1 haben, mit $\mathrm{charpol}_A = (X-4)^3(X+3)^2$ folgt weiter, daß es genau drei solche Blöcke gibt. Aus $\mathrm{minpol}_A = (X-4)(X+3)^2$ folgt, daß es mindestens einen Jordanblock der Größe 2 zum Eigenwert -3 gibt, und daß es keine größeren gibt. Zusammen mit $\mathrm{charpol}_A = (X-4)^3(X+3)^2$ folgt, daß es nur einen solchen Jordanblock der Größe 2 und keine weiteren Jordanblöcke zum Eigenwert -3 gibt. Also lautet die JNF:

$$\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & -3 & 1 \\ & & & & -3 \end{pmatrix}$$

b) Die Antwort lautet nein. Sei etwa $\mathrm{charpol}_B = X^5$ und $\mathrm{minpol}_B = X^2$. Dann haben offenbar die folgenden beiden Matrizen in Jordanscher Normalform dieses charakteristische Polynom und Minimalpolynom.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Daß beide charakteristisches Polynom X^5 haben, folgt aus der oberen Dreiecksgestalt mit nur Nullen auf der Diagonalen, daß beide Minimalpolynom X^2 haben daraus, daß bei beiden der größte Jordanblock die Größe 2 hat. Die beiden Jordanschen Normalformen sind jedoch offenbar verschieden.

Aufgabe 3 Offenbar sind wegen (i) A und B in Trigonalgestalt, beide sind also über K ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. Damit genügt es zu zeigen, daß beide die gleiche JNF haben. Zunächst folgt aus (i) und (ii), daß beide nur den Eigenwert λ haben. Aus (i), (ii) und (iii) folgt zusammen, daß $\ker(A - \lambda E_n) = \ker(B - \lambda E_n) = \langle e_1 \rangle$, denn $(A - \lambda E_n)$ und $(B - \lambda E_n)$ sind in Zeilenstufenform und nach (iii) stehen in der ersten oberen Nebendiagonalen nur Einträge $\neq 0$. (Dabei ist e_1 wie üblich der erste

Standardbasisvektor des K^n.) Somit ist $\dim\ker(A-\lambda E_n)=\dim\ker(B-\lambda E_n)=1$, die JNF von A und B bestehen also beide aus nur einem Jordanblock der Größe n zum Eigenwert λ, sind also insbesondere gleich. Also sind A und B zueinander ähnlich.

Aufgabe 4 a) Man kann $n=2$ und $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ wählen. Denn offenbar ist $\mathrm{charpol}_A = X^2+1$, was über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Folglich ist A über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar.

b) Der Endomorphsmus f des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $e_1 \mapsto e_1$ und $e_1+e_2 \mapsto 2(e_1+e_2)$ hat offenbar die Eigenräume $< e_1 >$ und $< e_1+e_2 >$, und jeder Eigenvektor von f liegt in einem dieser Eigenräume, denn die zugehörigen Eigenwerte sind verschieden. Damit ist f jedenfalls diagonalisierbar. Da e_1 und e_1+e_2 nicht senkrecht zueindander stehen, gibt es jedoch keine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Zusammen folgt, daß f nicht normal ist. Bezüglich der Standardbasis hat f die Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Wir können also z.B. $n=2$ und A wie gerade angegeben wählen.

Aufgabe 5

Sei $(,)$ das Standardskalarprodukt. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren an. Sei $v_1 = u_1/\|u_1\| = \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$. Es ist $u_2-(v_1,u_2)v_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \neq 0$. Sei $v_2 = (u_2 - (v_1,u_2)v_1)/\|u_2-(v_1,u_2)v_1\| = \begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\0\\1/\sqrt{6}\\0\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$. Weiter ist $u_3-(v_1,u_3)v_1-(v_2,u_3)v_2=0$.

Weiter ist $(v_1,u_4)=0$ und $(v_2,u_4)=0$. Sei also $v_4=u_4/\|u_4\| = \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\\0\\0\end{pmatrix}$. Damit bilden v_1,v_2,v_4 eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 6

Offensichtlich ist $\ker(f)\subseteq\ker(f^*\circ f)$, denn wenn $f(v)=0$, so $f^*(f(v))=f^*(0)=0$. Sei umgekehrt $v\in\ker((f^*\circ f)$ und sei $\langle,\rangle$ das Skalarprodukt auf V. Dann gilt $0=\langle f^*(f(v)),v\rangle=\langle f(v),f(v)\rangle$. Da $\langle,\rangle$ ein Skalarpodukt ist, also positiv definit ist, folgt daraus $f(v)=0$, also $v\in\ker(f)$.

Aufgabe 7

Bezüglich der dualen Basen zu den Standardbasen des $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^2$ ist $f_A^\vee$ durch A^t gegeben. Es gilt offenbar $A^t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$. Bezeichnet $e_1^\vee,e_2^\vee,e_3^\vee$ die duale Basis der Standardbasis des $\mathbb{Q}^3$, so folgt damit $e_1^\vee-2e_2^\vee+e_3^\vee\in\ker(f_A^\vee)\setminus\{0\}$.