Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 1

Abgabe: 23. April 2018

Unter einem Ring verstehen wir im folgenden stets einen kommutativen Ring mit 1.

Aufgabe 1
Sei R ein Ring.

a) Zeigen Sie, dass ein Element $x \in R$ genau dann in jedem maximalen Ideal von R enthalten ist, wenn $1 - xy$ für jedes $y \in R$ invertierbar ist.

b) Der Ring R heißt lokal, falls er genau ein maximales Ideal besitzt. Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein Ideal, so ist R genau dann lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, wenn jedes Element in $R \backslash \mathfrak{m}$ invertierbar ist.

Hinweis: Für Teil a), dürfen Sie verwenden, dass jedes Ideal $I \subsetneq R$ in einem maximalen Ideal von R enthalten ist.

Aufgabe 2
Sei R ein Ring mit der Eigenschaft, dass zu jedem $x \in R$ ein $n \in \mathbb{N}_{>1}$ existiert, derart dass $x^n = x$ gilt. Zeigen Sie, dass jedes Primideal von R bereits maximal ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Ringe lokal sind, vgl. Aufgabe 1 b) auf diesem Übungsblatt, und bestimmen Sie jeweils das maximale Ideal.

a) $K[T]/(T^{n+1})$, mit $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper K

b) $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$, mit $n \in \mathbb{N}$ und einer Primzahl p

Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass Quotienten modulo maximaler Ideale Körper sind.

Aufgabe 4
Sei R ein Hauptidealring, zum Beispiel $R = \mathbb{Z}$, oder $R = K[T]$ für einen Körper K. Bestimmen Sie alle abgeschlossen und alle offenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$.