Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 10

Abgabe: 25. Juni 2018

Aufgabe 37

Seien R und R' lokale Ringe mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{m}'$. Sei $\varphi : R \to R'$ ein lokaler Ringhomomorphismus, d.h. es gelte $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}'$. Dann induziert φ einen Homomorphismus $\kappa(\mathfrak{m}) \to \kappa(\mathfrak{m}')$ zwischen den Restklassenkörpern. Sei nun zusätzlich φ flach und sei M ein R-Modul. Zeigen Sie: Gilt $M \otimes_R R' = 0$, so gilt $M = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass jeder R-Modul die Vereinigung seiner endlich erzeugten Untermoduln ist.

Aufgabe 38

Sei $\varphi : R \to R'$ ein flacher lokaler Ringhomomorphismus zwischen lokalen Ringen und sei $E : M' \to M \to M''$ eine Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie: Ist $E \otimes_R R'$ exakt, so ist E exakt.

Bemerkung: Mit Satz 2.28 der Notizen zur Vorlesung, Aufgabe 37 und Aufgabe 38 kann man den Teil a) $\Rightarrow$ b) von Aufgabe 36 zeigen.

Aufgabe 39

Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und sei $f\colon \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$ die zu φ gehörige Abbildung.

(1) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Zeigen Sie, dass der Ringhomomorphismus

$$R' \longrightarrow R' \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}), \quad x \mapsto x \otimes 1,$$

eine injektive Abbildung

$$\operatorname{Spec} R' \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec} R'$$

induziert, deren Bild genau die Faser $f^{-1}(\mathfrak{p})$ ist.

(2) Nun gelte zusätzlich, dass alle Sequenzen $E : M' \to M \to M''$ von R-Moduln, für die $E \otimes_R R'$ exakt ist, selbst exakt sind. Folgern Sie aus Teil (1), dass die zu φ gehörige Abbildung $f\colon \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$ surjektiv ist.

Bemerkung: Aus Teil (2) diese Aufgabe folgt die Implikation b) $\Rightarrow$ a) in Aufgabe 36.

Aufgabe 40
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und sei $f : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f zugleich ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist.