Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 11

Abgabe: 2. Juli 2018

Aufgabe 41

Sei $\varphi : A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus.

a) Ist $a \in A$ ein Element mit $\varphi(a) \in B^\times$, so gilt $a \in A^\times$.

b) Nehmen wir an, dass sowohl A als auch B Integritätsringe sind. Zeigen Sie: Genau dann ist A ein Körper, wenn B ein Körper ist.

Aufgabe 42

Sei k ein Körper, und sei

$$\varphi : k[x,y]/(y^2 - x^3 - x^2) \to k[t]$$

der durch $x \mapsto t^2 - 1$, $y \mapsto t^3 - t$ gegebene Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ endlich ist. Veranschaulichen Sie sich die durch φ induzierte Abbildung von Primspektren. Zeigen Sie, dass der durch φ induzierte Homomorphismus

$$k[x,y]/(y^2 - x^3 - x^2) \to (k[t])_{t-1}$$

eine Bijektion von Primspektren induziert, aber nicht ganz ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 10 sowie Teil a) von Aufgabe 41.

Aufgabe 43

Sei d eine quadratfreie ganze Zahl. Berechnen Sie den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Aufgabe 44

Sei R ein Ring und sei G eine endliche Untergruppe der Gruppe $\mathrm{Aut}(R)$ aller Ringautomorphismen von R. Sei

$$R^G := \{x \in R;\ \forall g \in G\colon g(x) = x\}.$$

Zeigen Sie, dass die Inklusion $R^G \to R$ ein ganzer Ringhomomorphismus ist.