Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 12

Abgabe: 9. Juli 2018

Aufgabe 45

Sei A ein Unterring eines Rings B und sei $S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, dass für den ganzen Abschluss $\tilde{A}$ von A in B gilt: $S^{-1}\tilde{A} = \widetilde{S^{-1}A}$, der ganze Abschluss von $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.

Aufgabe 46

Sei A ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) A ist ganzabgeschlossen.

(2) $\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $A_\mathfrak{p}$ ist ganzabgeschlossen.

(3) $\forall\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$, $A_\mathfrak{m}$ ist ganzabgeschlossen.

Hinweis: Sei $K = \operatorname{Frac}(A)$ und $\tilde{A} \subseteq K$ der ganze Abschluss von A. Betrachten Sie den Homomorphismus $\varphi : A \to \tilde{A}$.

Aufgabe 47

Sei A ein Unterring eines Integritätsrings B und sei A ganzabgeschlossen in $K := \operatorname{Frac}(A)$. Zeigen Sie: Ist $x \in B$ ganz über A, so ist x, als Element von $L := \operatorname{Frac}(B)$ aufgefasst, algebraisch über K und $\operatorname{MinPol}_K(x) \in A[X]$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass alle Nullstellen von $\operatorname{MinPol}_K(x)$ ganz über A sind.

Aufgabe 48

Sei k ein Körper, und sei $R = k[x,y]/(xy)$. Finden Sie für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ einen injektiven und endlichen Homomorphismus von k-Algebren $k[t_1, \cdots, t_n] \hookrightarrow R$.