Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018
Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 2

Abgabe: 30. April 2018

Aufgabe 5

Sei R ein Ring, sei $I \subset R$ ein Ideal, sei $\varphi : R \to R/I$ der kanonische Homomorphismus, und sei $\varphi^{\mathrm{a}} : \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ die resultierende injektive Abbildung von Primspektren. Zeigen Sie, dass das Bild von φ^{a} in $\operatorname{Spec} R$ mit der abgeschlossenen Teilmenge $V(I)$ von $\operatorname{Spec} R$ übereinstimmt und dass sich die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R/I$ via φ^{a} mit der Teilraumtopologie auf $V(I)$ bzgl. der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R$ identifiziert.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Fasern der Abbildung $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, wobei

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen ist.

Hinweis: Sie dürfen die folgenden Tatsachen verwenden (Algebra 1, Übungsaufgaben 27, 28).

a) Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist euklidisch bezüglich der Normabbildung $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a+bi \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$, und daher insbesondere ein Hauptidealring.

b) Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 4$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $N(\alpha) = N(\beta) = p$, so dass $p = \alpha\beta$ gilt.

c) $\mathbb{Z}[i]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[i] \colon N(x) = 1\}$.

Aufgabe 7

Zeigen Sie: Ist R ein Ring, so ist $\operatorname{Spec} R$ in der Zariski-Topologie quasi-kompakt.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass jede Überdeckung von $\operatorname{Spec} R$ durch offene Teilmengen der Form $D(f)$ mit $f \in R$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 8

Sei R ein Ring, sei $S \subset R$ ein multiplikatives System, und sei

$$\varphi : R \to S^{-1}R$$

der kanonische Homomorphismus. Zeigen Sie:

a) Die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ identifiziert sich mit der Teilraum-Topologie auf $\operatorname{im} \varphi^{\mathrm{a}}$.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ im Fall, wo $S = R \backslash \mathfrak{p}$ gilt für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, ebenso für den Fall, wo $S = \{f^n; n \in \mathbb{N}\}$ gilt für ein $f \in R$.