Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 3

Abgabe: 7. Mai 2018

Aufgabe 9

Sei R ein Ring, seien $f, g \in R$, sei $I \subseteq R$ ein Ideal, und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal mit $f \notin \mathfrak{p}$ und $I \subseteq \mathfrak{p}$. Etablieren Sie die folgenden kanonischen Isomorphien:

a) $R_{\mathfrak{p}}/IR_{\mathfrak{p}} \cong (R/I)_{\mathfrak{p}(R/I)}$;

b) $(R_f)_{\mathfrak{p}R_f} \cong R_{\mathfrak{p}}$;

c) $(R_f)_{\frac{g}{1}} \cong R_{fg}$.

Aufgabe 10

Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass die Ringe $(k[x,y]/(y^2 - x^3 - x^2))_x$ und $k[t]_{t^2-1}$ isomorph sind.

Hinweis: Betrachten Sie den Ringhomomorphismus

$$k[x,y] \to k[t] \,:\, x \mapsto t^2 - 1, y \mapsto t^3 - t.$$

Aufgabe 11

Sei K ein Körper. Bestimmen Sie das Jacobson-Radikal von $K[X_1, \cdots, X_n]$. (Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, dass K unendlich viele Elemente besitzt.)

Aufgabe 12

Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein minimales Primideal.

a) Zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ in $R_{\mathfrak{p}}$ nilpotent ist, und folgern Sie, dass jedes Element von $\mathfrak{p}$ in R ein Nullteiler ist.

b) Zeigen Sie: Ist R reduziert, so ist jeder Nullteiler von R in einem minimalen Primideal von R enthalten.

c) Zeigen Sie, dass die Aussage in b) im allgemeinen nicht gilt, wenn man auf die Voraussetzung, dass R reduziert sei, verzichtet.

Hinweis: Für Teil c), betrachten Sie das Beispiel $R = K[X,Y]/(X^2, XY)$ für einen Körper K.