Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018
Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 4

Abgabe: 14. Mai 2018

Aufgabe 13
Sei R ein Ring. Betrachten Sie die Zuordnungen

$$\{\mathfrak{a} \subseteq R \text{ Ideal}\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \{M \text{ Teilmenge von } \operatorname{Spec} R\},$$

welche durch

$$V : \mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$$

und

$$I : M \mapsto \{f \in R; \forall x \in M, f(x) = 0\}$$

gegeben sind. Zeigen Sie die Aussagen

a) $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ und

b) $V(I(M)) = \overline{M}$,

wobei $\overline{M} \subseteq \operatorname{Spec} R$ den Abschluss von M in $\operatorname{Spec} R$ bezeichne, d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$, welche M enthält.

Aufgabe 14
Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Zeigen Sie: Sind V_1, V_2 abgeschlossene Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$ und gilt

$$V(\mathfrak{p}) = V_1 \cup V_2,$$

so gilt $V(\mathfrak{p}) = V_1$ oder $V(\mathfrak{p}) = V_2$.

Aufgabe 15
Sei R ein Ring, sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, und sei $\varphi : N \to M$ ein injektiver Homomorphismus von R-Moduln.

a) Zeigen Sie, dass der induzierte Homomorphismus $S^{-1}\varphi : S^{-1}N \to S^{-1}M$ gleichfalls injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass sich $S^{-1}(M/N)$ in kanonischer Weise mit $S^{-1}M/S^{-1}N$ identifiziert.

c) Zeigen Sie: Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so identifiziert sich $S^{-1}I$ in natürlicher Weise mit $IS^{-1}R$.

Aufgabe 16

a) Sei M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Dann lässt sich M durch Umformungen vom Typ (1)-(4) auf die Form $\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ mit $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$ bringen:

   (1) Vertausche zwei Zeilen.

   (2) Ziehe für $i \neq j$ ein ganzzahliges Vielfaches der i-ten Zeile von der j-ten Zeile ab.

   (3) Vertausche zwei Spalten.

   (4) Wie (2) für Spalten.

b) Sei $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln. Zeigen Sie: es existiert Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_n\}$ von $\mathbb{Z}^n$, so dass die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von der Form $\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ mit $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$ ist.