Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 5

Abgabe: 21. Mai 2018

Aufgabe 17

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann existieren $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$, so dass $G \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass sich jede Untergruppe $H \subseteq \mathbb{Z}^n$ durch nicht mehr als n Elemente erzeugen lässt (siehe Algebra 1, Übungsaufgabe 14 2)).

Aufgabe 18

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, seien M, N endlich erzeugte R-Moduln, und sei $f : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Zeigen Sie:

a) Der Homomorphismus f ist genau dann surjektiv, wenn der induzierte Homomorphismus $\bar{f} : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ surjektiv ist.

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $\bar{f} : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ injektiv ist, f jedoch nicht injektiv ist.

Aufgabe 19

Sei R ein Ring, und seien M, N und P Moduln über R.

a) Zeigen Sie, dass $M \otimes_R N$ und $N \otimes_R M$ kanonisch isomorph sind. Zeigen Sie andererseits durch ein Beispiel, dass im allgemeinen Elemente $m, m' \in M$ existieren mit $m \otimes m' \neq m' \otimes m$ in $M \otimes_R M$.

b) Zeigen Sie, dass $(M \otimes_R N) \otimes_R P$ und $M \otimes_R (N \otimes_R P)$ kanonisch isomorph sind.

c) Sei A ein Ring, sei B eine A-Algebra, sei M ein A-Modul, und sei N ein B-Modul. Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ und $\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N)$ kanonische B-Modulstrukturen tragen und dass sie zudem als B-Moduln kanonisch isomorph sind.

Aufgabe 20

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $2 \otimes \bar{1} = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

b) $2 \otimes \bar{1} = 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.