Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018
Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 6

Abgabe: 28. Mai 2018

Aufgabe 21

Bestimmen Sie für alle ganzen Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ den Ring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 22

Sei K ein Körper, sei K'/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei K''/K eine normale Erweiterung, welche K' enthält. Zeigen Sie, dass der Ring $K' \otimes_K K''$ zu einem endlichen Produkt von Kopien von K'' isomorph ist.

Hinweis: Betrachten Sie ein primitives Element der Erweiterung K'/K.

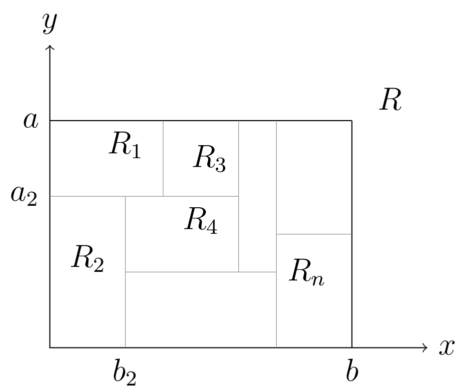
Aufgabe 23

Sei K ein Körper, und seien F/K, E/K Erweiterungskörper von K. Zeigen Sie, dass ein Erweiterungskörper Ω von K existiert, in welchen sich sowohl F als auch E einbetten lassen.

Hinweis: Konstruieren Sie Ω als Quotienten von $E \otimes_K F$.

Aufgabe 24

Sei R ein Rechteck mit Eckpunkten $(0,0), (0,a), (b,0), (b,a)$ in der reellen Ebene, und sei $\{R_1, R_2, \cdots, R_n\}$ eine Kachelung von R durch Rechtecke. Sei a_i (beziehungsweise b_i) die senkrechte (beziehungsweise waagerechte) Seitenlänge von R_i, vergleiche die Abbildung.



(1) Zeigen Sie, dass $a \otimes_{\mathbb{Q}} b = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_{\mathbb{Q}} b_i$ im Ring $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

(2) Nehmen wir nun an, dass für jedes i mindestens eine der Zahlen a_i, b_i in $\mathbb{Q}$ liegt. Zeigen Sie, dass a oder b in $\mathbb{Q}$ liegt.

Hinweis: Benutzen Sie in Teil (2), dass eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{Q}$ existiert und betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \otimes y \mapsto f(x)f(y)$.

Bemerkung: Für einen ähnlichen Beweis für die analoge Aussage für $\mathbb{Z}$ anstelle von $\mathbb{Q}$ und Literaturverweise zu diesem Thema siehe:
`https://math.stackexchange.com/q/829441`.