

Übungsblatt 8

Abgabe: 11. Juni 2018

Aufgabe 29

Zeigen Sie: Ist R ein Ring und ist

$$E : 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$$

eine Sequenz von R -Moduln, so ist E genau dann exakt, wenn für alle R -Moduln N die induzierte Sequenz

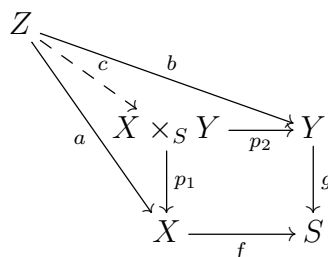
$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, M') \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, M) \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, M'')$$

exakt ist.

Aufgabe 30

Sei \mathcal{C} eine Kategorie, und seien $f : X \rightarrow S$ und $g : Y \rightarrow S$ zwei Morphismen in \mathcal{C} . Ein Faserprodukt von f und g ist ein Objekt, bezeichnet mit $X \times_S Y$, zusammen mit Morphismen $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$, wenn $f \circ p_1 = g \circ p_2$ und die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Zu jedem Paar von Morphismen $(Z \xrightarrow{a} X, Z \xrightarrow{b} Y)$ in \mathcal{C} mit $f \circ a = g \circ b$, gibt es genau einen Morphismus $c : Z \rightarrow X \times_S Y$, so dass $p_1 \circ c = a$ und $p_2 \circ c = b$, vergleiche das Diagramm.



Wenn ein Faserprodukt von (f, g) in \mathcal{C} existiert, ist es eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Zeigen Sie, dass in der Kategorie der Mengen und in der Kategorie der abelschen Gruppen das Faserprodukt zu zwei beliebigen Morphismen $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ existiert.

Geben Sie ein Beispiel einer Kategorie \mathcal{C} und zweier Morphismen $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ in \mathcal{C} , deren Faserprodukt nicht existiert.

Aufgabe 31

Sei R ein Ring, und sei

$$\begin{array}{ccccccc} M'_1 & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \xrightarrow{g_1} & M''_1 & \longrightarrow & 0 \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & & & \\ M'_2 & \xrightarrow{f_2} & M_2 & \xrightarrow{g_2} & M''_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Zeigen Sie, dass genau ein R -Homomorphismus $\gamma : M'_1 \rightarrow M''_2$ existiert, derart dass das resultierende Diagramm kommutiert. Zeigen Sie ferner, dass γ ein Isomorphismus ist, sofern α und β Isomorphismen sind.

Aufgabe 32

Sei R ein Ring, und sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln. Zeigen Sie: Sind M' und M'' endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt. Gilt auch die umgekehrte Implikation?