Lecture Course Algebra 2 – Commutative Algebra SS 2018

Prof. Dr. Ulrich Görtz

Dr. Heer Zhao

Übungsblatt 9

Abgabe: 18. Juni 2018

Aufgabe 33

Sei R ein Ring, und sei M ein R-Modul. Wir definieren den Träger $\operatorname{Supp}(M)$ von M als die Menge der Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Genau dann ist $M \neq 0$, wenn $\operatorname{Supp}(M) \neq \emptyset$ gilt.

b) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so gilt $\operatorname{Supp}(R/\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$.

c) Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz, so gilt $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(M') \cup \operatorname{Supp}(M'')$.

d) Ist M die Summe einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R-Untermoduln, so gilt

$$\operatorname{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Supp}(M_i).$$

e) Ist M endlich erzeugt, so gilt $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{Ann}(M))$; insbesondere ist $\operatorname{Supp}(M)$ dann abgeschlossen in $\operatorname{Spec} R$.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden uns bekannten Tatsachen über Tensorprodukte:

(1) $M_{\mathfrak{p}} \cong M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$,

(2) $R_{\mathfrak{p}}$ ist flach über R,

(3) das Tensorprodukt ist rechtsexakt,

(4) Tensorprodukte kommutieren mit beliebigen direkten Summen.

Arbeiten Sie ökonomisch; nutzen Sie beispielsweise Teilaufgaben b) und d) zur Lösung von Teilaufgabe e).

Aufgabe 34

Sei $R \neq 0$ ein Ring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie: Existiert ein Isomorphismus von R-Moduln $R^m \cong R^n$, so gilt notwendig $m = n$.

b) Zeigen Sie: Existiert ein surjektiver R-Homomorphismus $R^m \to R^n$, so gilt notwendig $m \geq n$.

Aufgabe 35
Zeigen Sie: Ist R ein Ring, ist M ein R-Modul, sind M_1 und M_2 R-Untermoduln von M und ist N ein flacher R-Modul, so stimmen die R-Untermoduln

$$(M_1 \cap M_2) \otimes_R N$$

und

$$(M_1 \otimes_R N) \cap (M_2 \otimes_R N)$$

von $M \otimes_R N$ überein.

Aufgabe 36
Sei $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

a) f ist flach und die zugehörige Abbildung $\operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$ ist surjektiv.

b) Für alle Sequenzen $E : M' \to M \to M''$ von R-Moduln gilt: E ist genau dann exakt, wenn $E \otimes_R R'$ exakt ist. (In diesem Fall nennt man f auch treuflach.)