Lineare Algebra I — Klausur

Aufgabe 1 (3+5 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

a) Definiere, wann eine Familie $v_1, ..., v_m$ (wobei $m \in \mathbb{N}$) von Elementen aus V linear abhängig ist. (Wird dabei der Begriff der linearen Unabhängigkeit verwendet, so ist dieser ebenfalls zu definieren.)

b) Sei jetzt $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Gib die Definitionen der Begriffe Eigenwert und Eigenvektor zu f an.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ lösbar?

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & b \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & c \end{array}$$

Gib in diesem Fall die Lösungsmenge an.

Aufgabe 3 (8+2 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V. Untersuche, ob die Vektoren $v_1 + v_2 - v_3, v_2 - v_3, v_2 - v_4, v_1 + v_2 - v_3 - v_4$

a) linear unabhängig sind.

b) eine Basis von V bilden.

(Zur Lösung gehört auch ein Beweis dafür, daß die Antworten richtig sind.)

Aufgabe 4 (10+12 Punkte)

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ über einem Körper K. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$.

a) Zeige, daß $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

b) Zeige, daß es eine natürliche Zahl $m \leq n$ und eine Basis $\mathfrak{B}$ von V gibt, so daß $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ von der Form

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times(n-m)} \\ 0_{(n-m)\times m} & 0_{(n-m)\times(n-m)} \end{pmatrix}$$

ist, wobei E_m die Einheitsmatrix der Größe $m \times m$ ist, und $0_{i\times j}$ jeweils für die Nullmatrix der Größe $i \times j$ steht.

bitte wenden

Aufgabe 5 (5+11 Punkte)

Wir betrachten folgende lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme den Rang von f.

b) Bestimme die Matrix von f bezüglich der Basen

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{Q}^4$ und

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{Q}^3$. (Es darf ohne Beweis verwendet werden, daß es sich hierbei um Basen des $\mathbb{Q}^4$ bzw. des $\mathbb{Q}^3$ handelt.)

Aufgabe 6 (12+3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, und sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die folgende $n \times n$ Matrix C über $\mathbb{Q}$.

$$C = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a & a \\ a & b & a & \dots & a & a \\ a & a & b & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b & a \\ a & a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

Alle Diagonaleinträge sind also gleich b, alle anderen Einträge sind gleich a.

a) Bestimme die Determinante der Matrix C. (*Hinweis:* Verwende geeignete Zeilen- und Spaltenumformungen.) Zur Kontrolle: $\det(C) = (b + (n-1)a) \cdot (b-a)^{n-1}$

b) Unter welchen Bedingungen an a und b ist C invertierbar? (Begründung)

Aufgabe 7 (4+6+10 Punkte)

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeige, daß f genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert von f ist.

b) Sei nun f invertierbar und sei λ ein Eigenwert von f. Zeige, daß λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist, und daß für die zugehörigen Eigenräume $V_\lambda(f) = V_{\lambda^{-1}}(f^{-1})$ gilt.

c) Zeige, daß f genau dann von der Form $c \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $c \in K$ ist, wenn jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist.