Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

10. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 15. Juni 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Aufgabe 1

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei U ein Unterraum von V. Wir bezeichnen mit $U^\perp \subset V^*$ den Unterraum aller $f \in V^*$ mit $f_{|U} = 0$. Zeige, daß $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Aufgabe 2

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Zeige, daß $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$, und daß $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Aufgabe 3

a) Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}.$$

Berechne die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2\}$ zu $\mathcal{B}$, gebe dabei die f_i in der Form $f_i(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = a_i x + b_i y$ an.

b) Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \}.$$

Berechne die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ zu $\mathcal{B}$, gebe dabei die f_i in der Form $f_i(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = a_i x + b_i y + c_i z$ an.

Präsenzaufgabe

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Zeige, daß die K-Vektorräume $\mathrm{Hom}_K(V, W^*)$ und $\mathrm{Bil}(V \times W, K)$ isomorph sind.