Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

11. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 22. Juni 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und n eine positive ganze Zahl. Seien $F, G \in (K^n)^\vee$. Zeige, daß durch $\langle v, w \rangle = F(v) \cdot G(w)$ eine Bilinearform auf dem K^n gegeben ist.

Aufgabe 2

Eine Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ auf einem Vektorraum V heißt *alternierend*, falls $\langle v, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Sei jetzt K ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt, und sei V ein K-Vektorraum. Zeige, daß sich jede Bilinearform auf V in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform schreiben läßt.

Aufgabe 3

Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Wir betrachten die Bilinearform β auf dem $\mathbb{R}^2$, die durch B gegeben ist, d.h. $\beta(x, y) = x^t B y$. Weiter sei $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die zugehörige quadratische Form, d.h. $q(x) = \beta(x, x)$. Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^2\ ;\ q(x) = 1\}$.

a) Zeige, daß die Matrix B diagonalisierbar ist.

b) Sei ab jetzt B durch $a = 7, b = 2$ und $c = 4$ gegeben. Zeige, daß es eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus zueinander orthogonalen Eigenvektoren von B gibt. Bestimme eine solche Basis v_1, v_2.

c) Sei s_i die Spiegelung an der Geraden, die von dem Eigenvektor v_i aufgespannt wird. Zeige, daß Q durch s_i in sich überführt wird.

d) Skizziere Q.

Aufgabe 4

Lösen Sie folgende Schulbuchaufgabe (aus: Lambacher Schweizer „Lineare Algebra mit analytischer Geometrie“):

Eine Raute ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten. Beweisen Sie mithilfe des Skalarprodukts:
a) In einer Raute sind die Diagonalen zueinander orthogonal.
b) Sind die Diagonalen eines Parallelogramms zueinander orthogonal, dann ist es eine Raute.

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an und fassen Sie die Eckpunkte der Raute/des Parallelogramms als Vektoren auf.

Präsenzaufgabe

Sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum V über einem Körper K. Wir betrachten die Abbildung $q : V \to K$ gegeben durch $q(v) = \langle v, v\rangle$. (Man nennt q die zu $\langle\ ,\ \rangle$ gehörige *quadratische Form.*) Sei nun vorausgesetzt, daß $1 + 1 \neq 0$ in K. Zeige, daß die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ durch die Abbildung q bereits eindeutig bestimmt ist. (M.a.W., wenn zwei symmetrische Bilinearformen dieselbe Abbildung q erzeugen, so sind diese Bilinearformen gleich.)