Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

12. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 29. Juni 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Aufgabe 1

Bestimme mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis des folgenden Unterraums U des $\mathbb{C}^5$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt):

$$U = < \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1+4i \\ 2i \\ -2+i \\ -2 \\ 2i \end{pmatrix} >$$

.

Aufgabe 2

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, und seien $v_1, ..., v_m \in V$. Man definiert die *Gramsche Determinante* von $v_1, ..., v_m$ als

$$G(v_1, ..., v_m) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß stets $G(v_1, ..., v_m) \geq 0$ gilt, und daß $G(v_1, ..., v_m) = 0$ genau dann, wenn $v_1, ..., v_m$ linear abhängig sind. (Man definiert (für $m \leq \dim V$) das *Volumen* des von $v_1, ..., v_m$ aufgespannten Parallelotops als $\mathrm{vol}(v_1, ..., v_m) = \sqrt{G(v_1, ..., v_m)}$.)

Aufgabe 3

Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum, und sei b_1, b_2, b_3 eine Basis von V. Wir betrachten die Bilinearform s auf V, die bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 durch die folgende Matrix A gegeben ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Matrix von s bezüglich der Basis $b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_2$ von V.

Aufgabe 4

Aus der Schule kennen Sie das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt), das zu zwei gegebenen Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des dreidimensionalen Raums einen zu beiden orthogonalen Vektor ermittelt. (Die Orthogonalität bezieht sich hier immer auf das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$.)

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $v_1 \times v_2$ eine Lösung des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & a_3x_3 & = & 0 \\ b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & b_3x_3 & = & 0 \end{array}$$

bildet. Folgern Sie, dass $v_1 \times v_2$ orthogonal zu v_1 und orthogonal zu v_2 ist.

b) Seien v_1 und v_2 linear unabhängig. Zeigen Sie, dass für $A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

$$\dim(\ker A) = 1$$

gilt.

c) Seien v_1 und v_2 linear unabhängig. Folgern Sie aus a) und b), dass jeder zu v_1 und v_2 orthogonale Vektor ein Vielfaches von $v_1 \times v_2$ ist.

d) Bestimmen Sie nun auf zwei Wegen eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$, die die beiden Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält:

1. Indem Sie die Basis $\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens orthonormalisieren.
2. Indem Sie mit Hilfe des Vektorprodukts einen orthogonalen Vektor zu v_1 und v_2 bestimmen und diesen dann normieren.

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse!

Seien v_1 und v_2 allgemein zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, die normiert und zueinander orthogonal sind. Ist dann der normierte und zu v_1 und v_2 orthogonale Vektor eindeutig bestimmt, nicht eindeutig bestimmt oder eindeutig bis auf... bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Präsenzaufgabe

Wir betrachten noch einmal die Situation von Aufgabe 1 von Blatt 11: Sei K ein Körper und n eine positive ganze Zahl. Seien $F, G \in (K^n)^\vee$, und sei $\langle \ , \ \rangle$ die durch $\langle v, w \rangle = F(v) \cdot G(w)$ gegebene Bilinearform auf dem K^n. Wir schreiben F und G in der Form $F(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$ und $G(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = b_1x_1 + ... + b_nx_n$, wobei wie üblich $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis des K^n bezeichnet, und $a_i, b_i \in K$. Wie sieht die Matrix der Bilinearform $\langle \ , \ \rangle$ bzgl. der Standardbasis aus?