Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

2. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 20. April 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03).

Hausaufgabe 1

Sei K ein Körper, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$. Wir betrachten die Auswertungsabbildung $ev_A : K[X] \longrightarrow M_{2\times 2}(K)$ definiert durch $f \mapsto f(A)$. Bestimme die Matrix $ev_A(X^2 - (a+d)X + \det(A))$.

Hausaufgabe 2

a) Definiere den Begriff des euklidischen Rings.

b) Zeige, daß der Ring $\mathbb{Z}[i]$ euklidisch ist. (Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist definiert als die Menge aller $a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, versehen mit der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen. Da $\mathbb{Z}[i]$ offenbar abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist, folgt, daß es sich um einen Ring handelt.)

Anleitung: Betrachte die Abbildung $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit $N(a + b \cdot i) = a^2 + b^2$. (Beachte, daß N den Ring $\mathbb{Z}[i]$ nach $\mathbb{N}$ abbildet.) Zeige zunächst, daß $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Gehe nun wie folgt vor. Seien $c, d \in \mathbb{Z}[i]$ gegeben, wobei $d \neq 0$. Sei $\frac{c}{d} = x + i \cdot y =: z$ (als komplexe Zahl, i. A. kein Element von $\mathbb{Z}[i]$!). Zeige, daß es $n, m \in \mathbb{Z}$ gibt mit $|x - m| \leq 1/2$ und $|y - n| \leq 1/2$. Setze $q = m + i \cdot n$ und $r = c - dq$. Zeige nun, daß $N(r) = N(d) \cdot N(z - q) \leq \frac{1}{2} N(d)$.

c) Aus Teil b) folgt, daß in $\mathbb{Z}[i]$ eindeutige Primfaktorzerlegung gilt. Ist 3 ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$? Ist 5 ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$? Ist $1 + i$ ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$?

Hausaufgabe 3

a) Zeige, daß der Ring $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist.

b) Gib ein Beispiel für einen Ring an, der kein Integritätsbereich ist. (Begründung)

Hausaufgabe 4

a) Auf Blatt 1 haben Sie in Hausaufgabe 4 das Verfahren durch Wechselwegnahme zur Berechnung des ggT zweier natürlicher Zahlen kennengelernt. Ein anderes Verfahren zur Berechnung des $ggT(a, b)$ ist der euklidische Algorithmus.

Für natürliche Zahlen formuliert, lautet der euklidische Algorithmus: Wir nehmen an b ist kleiner als a. Dann teilen wir a durch b mit Rest. Das heißt, wir schreiben a in der Form

$$a = q_1 \cdot b + r_1, \quad \text{mit } q_1, r_1 \in \mathbb{N};\ r_1 < b$$

Den Divisor (hier: b) teilen wir dann durch den Rest (hier: r_1) und zwar wieder mit Rest:

$$b = q_2 \cdot r_1 + r_2, \quad \text{mit } q_2, r_2 \in \mathbb{N};\ r_2 < r_1$$

Der Divisor wird dann wieder durch den Rest geteilt. So erhalten wir eine Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3, \quad \text{mit } q_3, r_3 \in \mathbb{N};\ r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_4 \cdot r_3 + r_4, \quad \text{mit } q_4, r_4 \in \mathbb{N};\ r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{i-2} &= q_i \cdot r_{i-1} + r_i, \quad \text{mit } q_i, r_i \in \mathbb{N};\ r_i < r_{i-1}
\end{aligned}$$

Das Verfahren bricht ab, wenn $r_i = 0$ ist. Und dann gilt $ggT(a, b) = r_{i-1}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT von 160 und 44.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem euklidischen Algorithmus und dem Verfahren durch Wechselwegnahme? Vergleichen Sie dazu auch die Bestimmung des ggT von 24 und 10 auf Blatt 1 und dem Lösungsweg mittels euklidischem Algorithmus.

Begründen Sie, warum der euklidische Algorithmus für natürliche Zahlen immer abbrechen muss.

b) Ein Vorteil des euklidischen Algorithmus ist, dass er sich auf alle euklidischen Ringe übertragen lässt.

Berechnen Sie den ggT der beiden Polynome

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 4 \text{ und } g(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8.$$

Geben Sie auch hier eine Begründung für den Abbruch des euklidischen Algorithmus auf Polynomringen an.

Präsenzaufgabe

Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{\ z = a + i \cdot \sqrt{5}b \in \mathbb{C};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeige, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit der Addition und Multiplikatkion komplexer Zahlen ein Integritätsbereich ist.

b) Zeige, daß in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ keine eindeutige Primfaktorzerlegung gilt.
(*Hinweis*: $2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$)