Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

4. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 4. Mai 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03).

Hausaufgabe 1

Man nennt einen Endomorphismus f eines Vektorraums *nilpotent*, falls $f^m = 0$ für eine natürliche Zahl m (dabei ist f^m die m-fache Hintereinanderausführung von f). Sei nun $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension n, und sei f ein Endomorphismus von V. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) f ist nilpotent.

ii) $f^n = 0$.

iii) $\mathrm{charpol}_f = X^n$.

Hausaufgabe 2

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der linearen Abbildung $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, die bezüglich der Standardbasis durch die folgende Matrix A gegeben ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 3

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Seien f und g trigonalisierbare Endomorphismen von V, und es gelte $f \circ g = g \circ f$. Zeige, daß f und g simultan trigonalisierbar sind (d.h., daß es eine Basis von V gibt, bezüglich der die Matrizen von f und g beide obere Dreiecksmatrizen sind).

Hausaufgabe 4

a) Führen Sie die Addition der beiden Bruchzahlen $\frac{4}{6}$ und $\frac{2}{14}$ nach den aus der Schule bekannten Regeln aus!

b) In der Vorlesung wurden Bruchzahlen abstrakter als *Mengen* definiert, genauer gesagt als Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ auf $\mathbb{Z}$. Die Bruchzahl $\frac{6}{10}$ ist demnach etwa die Äquivalenzklasse

$$\tfrac{4}{6} := \{(2, 3), (-2, -3), (4, 6), (-4, -6), (6, 9), (-6, -9), (8, 12), \cdots\}.$$

Geben Sie auch die zu $\frac{2}{14}$ gehörige Äquivalenzklasse an!

c) Die Summenbildung zweier solche Äquivalenzklassen läuft nun ganz analog zu der aus der Schule bekannten Addition: Wir wählen zunächst einen Repräsentanten aus der ersten Menge und einen aus der zweiten Menge mit gleicher 2. Koordinate und definieren eine Addition für diese Repräsentanten durch $(a, b) + (c, b) := (a + c, b)$:

$$(14, 21) \in \tfrac{4}{6} \text{ und } (3, 21) \in \tfrac{2}{14}. \text{ Damit:}$$

$$(14, 21) + (3, 21) = (14 + 3, 21) = (17, 21).$$

Das Resultat ist also ein Repräsentant der Menge

$$\tfrac{17}{21} = \{(17, 21), (-17, -21), (34, 42), (-34, -42), \cdots\},$$

die wir als Ergebnis erhalten. Hätten wir auch andere Repräsentanten mit gleicher 2. Koordinate aus $\frac{4}{6}$ und $\frac{2}{14}$ addieren können? Geben Sie ein konkretes Beispiel an! Bei welcher Summe landen Sie mit Ihrer Wahl?

d) Zeigen Sie: Egal, welchen Repräsentanten (a, b) aus der ersten Menge ($\frac{4}{6}$) und welchen Repräsentanten (c, b) aus der zweiten Menge ($\frac{2}{14}$) man nimmt, man landet mit $(a + c, b)$ immer in der Menge $\frac{17}{21}$.

Hinweis: Was bedeutet es denn, dass (a, b) ein Element der ersten Menge ist? Es bedeutet, dass $(a, b) \sim (4, 6)$, also $6a = 4b$. Analog für (c, b) und $(a + c, b)$.

Präsenzaufgabe

Für welche Werte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -b & d \\ 1 & -a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar?