Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

5. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Hausaufgabe 1

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und sei $f(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in K[X]$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & 0 & & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(K)$$

die zugehörige Begleitmatrix. Zeige, daß $f(X)$ das Minimalpolynom von A ist.

Hausaufgabe 2

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und sei $A \in GL_n(K)$. Zeige, daß es ein Polynom $f(X) \in K[X]$ gibt, so daß $A^{-1} = f(A)$ ist.

Hausaufgabe 3

Die Folge der *Fibonaccizahlen* $f_0, f_1, f_2, ... \in \mathbb{N}$ ist definiert durch $f_0 = 0, f_1 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Gib einen geschlossenen Ausdruck für f_n an, der nur von n abhängt. *Anleitung*: Schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ in der Form $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$ für eine geeignete Matrix A, und schreibe A in der Form $A = SDS^{-1}$ für eine geeignete Diagonalmatrix D und eine geeignete invertierbare Matrix S.

Hausaufgabe 4

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen bzw. Endomorphismen und zerlegen Sie es in irreduzible Faktoren. Bestimmen Sie dann jeweils das Minimalpolynom und entscheiden Sie, ob die Matrix bzw. der Endomorphismus trigonalisierbar ist.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ (2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - 4y - 4z \\ 3y + 2z \\ -2x - 7y - 4z \end{pmatrix}$

(4) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 3y + 2z \\ -y \end{pmatrix}$

b) Geben Sie eine Matrix A an, die das charakteristische Polynom $\mathrm{charpol}_A(x) = (x-4)^3(x+1)^2$ und das Minimalpolynom $\mathrm{minpol}_A(x) = (x-4)^2(x+1)$ besitzt. Begründen Sie ihre Lösung!

Präsenzaufgabe

Bestimme jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ und $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.