Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

6. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 18. Mai 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Hausaufgabe 1

Sei V ein Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Zeige:

a) Gilt $\ker f^i = \ker f^{i+1}$ für eine natürliche Zahl i, so gilt $\ker f^i = \ker f^{i+k}$ für jede natürliche Zahl k.

b) Gilt $\operatorname{im} f^i = \operatorname{im} f^{i+1}$ für eine natürliche Zahl i, so gilt $\operatorname{im} f^i = \operatorname{im} f^{i+k}$ für jede natürliche Zahl k.

Hausaufgabe 2

Prüfe, ob sich die folgende Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ in Jordansche Normalform bringen läßt. Wenn dies der Fall ist, gib eine Matrix aus $M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ an, die in Jordanscher Normalform ist, und die zu A ähnlich ist.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 3

a) Sei V ein Vektorraum und f ein Endomorphismus von V. Definiere, wann man einen Unterraum U von V einen f-zyklischen Unterraum von V nennt.

b) Sei f ein nilpotenter Endomorphismus eines Vektorraums V. Sei $v \in \operatorname{im} f \setminus \{0\}$, und sei $U \subseteq V$ der von v erzeugte f-zyklische Unterraum. Zeige, daß U keinen f-invarianten Komplementärraum in V besitzt.

Hausaufgabe 4

3 Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der affinen Abbildung:
a) Spiegelung an der x_1-Achse,
b) Spiegelung an a: $x_2 = x_1$,
c) Drehung um O um 90°,
d) Zentrische Streckung von O aus mit Streckfaktor $k = 2$,
e) Scherung mit der Achse a: $x_2 = 0$, der Punkt $P(0|3)$ wird auf $P'(4|3)$ abgebildet.

a) Lösen Sie diese Schulbuchaufgabe (aus Lambacher Schweizer - „Lineare Algebra mit analytischer Geometrie“ Leistungskurs)

1. mittels geometrischer Überlegungen. Fertigen Sie dazu Skizzen an, in denen Sie die Eigenräume der Abbildungen kenntlich machen! Beschreiben Sie Ihre Überlegungen in 1-2 Sätzen.

2. mittels aus der Vorlesung bekannter Methoden (stellen Sie dazu die Darstellungsmatrizen bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ zu den Abbildungen auf).

[*Hinweise:* Bei den affinen Abbildungen der Aufgabe handelt es sich hier insbesondere um lineare Abbildungen im Sinne der Vorlesung. Das dürfen Sie ohne Beweis benutzen.

Mit O ist der Koordinatenursprung gemeint.

Die Scherungsabbildung in e) verändert die 2. Koordinate eines Vektors nicht, und der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird bei der Scherung auf sich selbst abgebildet.

Bei einer Scherung ist der Flächeninhalt des durch zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms und des durch die beiden Bildvektoren aufgespannten Parallelogramms gleich. Die Scherung spielt im Übrigen in vielen geometrischen Beweisen in der Schule eine wichtige Rolle (z.B. bei Beweisen zu den Sätzen der Satzgruppe des Pythagoras).]

b) Geben Sie zu den linearen Abbildungen der Schulbuchaufgabe jeweils die Zerlegung des $\mathbb{R}^2$ in verallgemeinerte Eigenräume an (mit Begründung)!

Präsenzaufgabe

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und sei $A \in M_{n\times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, daß A genau dann nilpotent ist, wenn alle Diagonaleinträge 0 sind.