Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

7. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 25. Mai 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Hausaufgabe 1

Sei V ein endlichdimensionaler Vekorraum, und seien f und g Endomorphismen von V. Es gelte $f \circ g = g \circ f$. Zeige:

a) Sind f und g diagonalisierbar, so sind sie simultan diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis von V, bezüglich der die Matrizen von f und g beide Diagonalmatrizen sind.

b) Sind f und g diagonalisierbar, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.

c) Sind f und g nilpotent, so ist auch $f + g$ nilpotent.

d) Zeige anhand von Gegenbeispielen, daß die Aussagen von Teil a), b) und c) nicht mehr stimmen müssen, wenn man auf die Bedingung $f \circ g = g \circ f$ verzichtet.

Hausaufgabe 2

Sei f der Endomorphismus des $\mathbb{C}^5$, der bezüglich der Standardbasis durch die folgende Matrix A gegeben ist.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme das charakteristische Polynom von A, und schreibe A als Summe einer diagonalisierbaren Matrix D und einer nilpotenten Matrix N mit $DN = ND$.

b) Bestimme die Jordansche Normalform von A.

c) Bestimme eine Basis des $\mathbb{C}^5$, bezüglich der die Matrix von f in Jordanscher Normalform ist.

Hausaufgabe 3

Sei f ein nilpotenter Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper K. Sei $v \in V$, und sei $U \subseteq V$ der von v erzeugte f-zyklische Unterraum. Zeige, daß $\dim U = \min\{m \; ; \; f^m(v) = 0\}$.

Hausaufgabe 4

Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -5 & \frac{5}{2} & 1 \\ -5 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

Hinweise:

1. Der Grenzwert von Matrizen sei punktweise definiert. Das heißt, bestehen die Einträge einer Matrix aus Folgen $a_n, b_n, c_n, \ldots$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \ldots$, so definieren wir:

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

2. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass

$$\lim_{n\to\infty} (S \cdot A^n \cdot S^{-1}) = S \cdot \lim_{n\to\infty} A^n \cdot S^{-1}$$

gilt, da es sich bei

$$\tau : M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ mit } \tau(A) = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

um eine mehrdimensionale, stetige Abbildung handelt (wie Sie sie bald in der Analysis 2 kennenlernen werden), falls $S \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix ist.

Präsenzaufgabe

Von einer Matrix $A \in M_{12\times 12}(\mathbb{C})$ sei folgendes bekannt:

$$charpol_A = X \cdot (X+2)^7 \cdot (X-5)^4$$

$$\dim\ker(A+2E) = 3, \quad \dim\ker(A+2E)^3 = 6$$

$$\dim\ker(A-5E) = 2, \quad \dim\ker(A-5E)^2 = 4$$

(Dabei ist E die Einheitsmatrix der Größe 12×12.) Bestimme die Jordansche Normalform und das Minimalpolynom von A.