Prof. Dr. U. Görtz
Dr. U. Terstiege
A. Herrmann

Sommersemester 2011

Lineare Algebra II

8. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 01. Juni 2011 vor der Vorlesung (Postfach 7 in T03 R03)

Aufgabe 1

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Weiter sei U' ein Komplementärraum zu U. Sei $p : V \to U'$ die Projektion (also $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$ wird auf u' abgebildet).

a) Zeige, daß U' mit der Abbildung p die universelle Eigenschaft des Quotienten V/U erfüllt. Folgere, daß es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\varphi : V/U \to U'$ gibt, so daß für die Quotientenabbildung $q : V \to V/U$ gilt $\varphi \circ q = p$. Wie sieht die Abbildung φ explizit aus?

b) Sei U'' ein weiterer Komplementärraum zu U. Zeige, daß U' und U'' als K-Vektorräume isomorph sind.

c) Sei jetzt zusätzlich vorausgesetzt, daß V endlichdimensional ist, und daß $0 \subsetneq U \subsetneq V$ ist. Zeige, daß es einen Komplementärraum $U'' \neq U'$ von U in V gibt.

Aufgabe 2

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K, sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, und sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum. Sei $f_{|U}$ die Einschränkung von f auf U und $\bar{f}$ die von f auf V/U induzierte Abbildung. Zeige, daß $\mathrm{charpol}_f = \mathrm{charpol}_{f_{|U}} \cdot \mathrm{charpol}_{\bar{f}}$ gilt.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und f ein Endomorphismus von V. Sei $p \in K[X]$ irreduzibel und ein Teiler des charakteristischen Polynoms von f. Zeige, daß p auch ein Teiler der Minimalpolynoms von f ist.

Hinweis: Verwende Induktion nach der Dimension von V. Betrachte im Induktionsschritt einen f-zyklischen Unterraum $U \neq 0$ von V, und nutze im Fall $\dim U < \dim V$ Aufgabe 2 und die Induktionsvoraussetzung. Im Fall $U = V$ nutze Aufgabe 1 von Blatt 5.

Aufgabe 4

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Betrachte die Unterräume $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ und $U' := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ von V.

a) Zeichnen Sie die folgenden Elemente des Quotientenraums V/U (aufgefasst als Teilmengen von V) in ein Koordinatensystem:

$$U, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + U$$

Falls zwei von Ihnen gezeichnete Elemente gleich sind, begründen Sie, warum das so ist!

b) Zeigen Sie, dass es sich beim Unterraum U' um einen Komplementärraum von U handelt. Geben Sie einen von U' verschiedenen Komplementärraum U'' von U an! (Dazu gehört auch zu beweisen, dass U'' tatsächlich Komplementärraum von U und $U' \neq U''$ ist.) Zeichnen Sie U, U', U'' in ein Koordinatensystem! Geben Sie nun alle Komplementärräume von U an, indem Sie eine Aussage über die Basis der Komplementärräume treffen! Wieviele Komplementärräume hat U demnach?

c) „Ein Vektor v aus $\mathbb{R}^2$ soll wie folgt durch f abgebildet werden: Wir zeichnen eine zu U parallele Gerade durch v. Wir suchen den Schnittpunkt dieser Geraden mit U'. Der Schnittpunkt ist dann $f(v)$."

Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welchen Vektor erhalten Sie für $f(v)$?

Erläutern Sie (evtl. auch anhand der Skizze), warum es sich bei der beschriebenen Abbildung f um die Projektion p aus Aufgabe 1 handelt ($p : V \to U'$ mit $v = u + u' \mapsto u'$).

Präsenzaufgabe

Sei V ein Vektorraum, sei f ein Endomorphismus von V, und sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum. Zeige, daß f eine Abbildung auf dem Quotienten V/U induziert.