Prof. Dr. U. Görtz **Sommersemester 2011**
Dr. U. Terstiege

Lineare Algebra II
Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, und sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Seien $A, B \in M_n(K)$ trigonalisierbare Matrizen, und für jeden Eigenwert λ von A sei die Dimension des verallgemeinerten Eigenraums von A zu λ höchstens 3.
Zeige, daß A genau dann ähnlich zu B ist, wenn $\mathrm{charpol}_A = \mathrm{charpol}_B$ und $\mathrm{minpol}_A = \mathrm{minpol}_B$ gilt. (Zur Erinnerung: Die Matrizen A und B sind nach Definition genau dann ähnlich zueinander, falls es ein $S \in GL_n(K)$ gibt mit $B = S^{-1}AS$.)

Aufgabe 2

Sei V ein unitärer Vektorraum, sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, so daß $\varphi^* = -\varphi$. (Dabei ist φ^* die zu φ adjungierte Abbildung.) Zeige:

a) Der Endomorphismus φ ist normal, und alle Eigenwerte von φ haben Realteil 0.

b) Der Endomorphismus $\varphi - \mathrm{id}_V$ ist ein Isomorphismus, und $(\varphi - \mathrm{id}_V)^{-1} \circ (\varphi + \mathrm{id}_V)$ ist eine Isometrie.

Aufgabe 3

Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Zeige, daß sich A unitär trigonalisieren läßt, d.h., es existiert eine unitäre Matrix U aus $GL_n(\mathbb{C})$, so daß $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $(.,.)$ und $\langle .,. \rangle$ Skalarprodukte auf V. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $(v, w) = a\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

ii) Für alle $v, w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ gilt auch $(v, w) = 0$.

Aufgabe 5

a) Sei $(V, (.,.))$ ein unitärer Vektorraum, und sei $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus mit $(v, f(v)) = 0$ für alle $v \in V$. Zeige, daß dann $f = 0$ ist.

b) Zeige durch Angabe eines Gegenbeispiels, daß die zu a) analoge Aussage für Euklidische Vektorräume falsch ist.

Aufgabe 6

Sei V ein unitärer oder Euklidischer Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Sei f^* die zu f adjungierte Abbildung. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) $f = 0$,

ii) $f^* \circ f = 0$,

iii) $\mathrm{Spur}(f^* \circ f) = 0$.

Aufgabe 7

a) Wie kann man prüfen, ob ein Endomorphismus trigonalisierbar ist?

b) Wie kann man prüfen, ob ein Endomorphismus diagonalisierbar ist?

c) Wie kann man die Jordansche Normalform eines Endomorphismus bestimmen? Wende Deine Antwort auf die Beispiele in den Übungsaufgaben an, und überlege Dir eigene Beispiele. (Einfacher wird es, wenn man sich obere Dreiecksmatrizen wählt.) Inwieweit ist die Jordansche Normalform eindeutig bestimmt? Begründe: Sind $A, B \in M_{n\times n}(K)$ trigonalisierbar, so ist A genau dann ähnlich zu B, wenn beide dieselbe Jordansche Normalform haben.

Aufgabe 8

Wiederhole folgende Übungsaufgaben:
Blatt 1: Aufgaben 2 und 3
Blatt 2: Aufgaben 1 und 3
Blatt 4: Aufgaben 1, 2, 3 und Präsenzaufgabe
Blatt 5: Aufgaben 1, 2, 3, 4 und Präsenzaufgabe
Blatt 6: Aufgaben 2, 4 und Präsenzaufgabe
Blatt 7: Aufgaben 1, 2a) und b), 3, 4 und Präsenzaufgabe
Blatt 8: Aufgaben 1, 4 und Präsenzaufgabe
Blatt 9: Aufgabe 1
Blatt 10: Aufgaben 1, 2, 3
Blatt 11: Aufgaben 1, 2, 3
Blatt 12: Aufgaben 1, 3, 4

Aufgabe 9

Wiederhole die Definitionen und Begriffe aus der Vorlesung, so daß Du sie reproduzieren kannst. (Insbesondere: Ring, Ideal, Integritätsbereich, Euklidischer Ring, Hauptidealring, irreduzibles Element, Primelement, Äquivalenzrelation, Quotientenkörper, charakteristisches Polynom, Minimalpolynom, Spur, Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit, nilpotenter Endomorphismus, Jordanblock, Jordanzerlegung, Jordansche Normalform, f-zyklischer Unterraum, Quotientenraum/Quotientengruppe/Quotientenring jeweils mit universeller Eigenschaft dazu, Produkt/Coprodukt mit universeller Eigenschaft, Dualraum, duale Basis, duale Abbildung, Bilinearform/ Sesquilinearform, symmetrische bzw. Hermitesche / Nicht-ausgeartete Bilinearform bzw. Sesquilinearform, Skalarprodukt, Euklidischer/unitärer Vektorraum, Orthogonalität, Orthonormalität, Orthonormalbasis, normale Abbildung, Isometrie, orthogonale/unitäre Abbildung, selbstadjungierte Abbildung bzw. symmetrische/ Hermitesche Matrix)

Aufgabe 10

Betrachte die Begriffe aus Aufgabe 9, die eine Eigenschaft eines Endomorphismus bezeichnen (z.B. Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit, Nilpotenz usw.). Welche Eigenschaft impliziert welche anderen Eigenschaften? Falls Eigenschaft A Eigenschaft B nicht impliziert, überlege Dir ein Beispiel für einen Endomorphismus, der A erfüllt, aber nicht B erfüllt.

Organisatorische Hinweise zur Klausur

- Die Klausur findet am 16.7.2011 von 10:00 bis 12:30 Uhr in Raum S05 T00 B08 statt.
- Die Anmeldung zur Klausur erfolgt über das Internet. Ein entprechender Link wird demnächst auf der Seite der Vorlesung *http://www.esaga.uni-due.de/ulrich.goertz/ss11/la2/* erscheinen.
- Bringen Sie Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis (z.B. Personalausweis) mit.
- Bitte schreiben Sie in blau oder schwarz, nicht mit Bleistift. Tintenkiller sind nicht zugelassen.
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Bringen Sie ausreichend Papier und Stifte mit.
- Geben Sie nicht mehrere Lösungen zu einer Aufgabe ab (wir werden nicht nach der besten suchen).
- Dokumentieren Sie Ihre Lösungen gut. (Unkommentierte Rechnungen genügen nicht.)
- Hilfsmittel (Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner etc.) sind nicht zugelassen. Bitte schalten Sie gegebenenfalls Ihr Handy aus.
- Täuschungsversuche führen zum sofortigen Ausschluß von der Klausur.
- Die Klausur ist mit mindestens 50% der erreichbaren Punkte bestanden.