Lineare Algebra I — Lösung zur Probeklausur

Aufgabe 1

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

a) Definiere, wann eine Familie $v_1, ..., v_m$ von Elementen aus V linear unabhängig ist.

b) Definiere, wann eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V ist.

Eine Familie $v_1, ..., v_m$ von Elementen des K-Vektorraums V ist linear unabhängig, wenn für $a_1, ..., a_m \in K$ die Gleichung $\sum_{j=1}^m a_j v_j = 0$ nur erfüllt ist, wenn alle $a_j = 0$ sind.

Eine Teilmenge U des K-Vektorraums V ist ein Untervektorraum, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1.) U ist nicht leer, 2.) für $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$, 3.) für $a \in K$ und $u \in U$ ist auch $a \cdot u \in U$.

Aufgabe 2

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & (1+a)x_2 & + & x_3 & = & 1+a \\ (a-1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ (a+1)x_1 & + & (1+2a)x_2 & + & x_3 & = & 1+2a \end{array}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der ersten und von der dritten Zeile, dann tauschen wir die erste und die zweite Zeile. Wir erhalten als äquivalentes LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} (a-1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2ax_2 & & & = & 1+a \end{array}$$

Multipliziert man die zweite Zeile mit 2 und vergleicht mit der dritten Zeile, so sieht man, daß für $a \neq 1$ die Lösungsmenge des LGS leer ist. Wir nehmen also ab jetzt $a = 1$ an. Dann sind die zweite und die dritte Zeile äquivalent, wir können das LGS also schreiben als

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

Damit sehen wir, daß für $a = 1$ die Lösungsmenge wie folgt gegeben ist

$$\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Q} \}$$

Aufgabe 3

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V$. Seien $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$. Zeige, daß die Elemente v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 linear abhängig sind.

Offenbar hat $U := \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ höchstens Dimension 4. Sei $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Wegen $M \subseteq U$ ist auch $\langle M \rangle \subseteq U$, und somit hat auch $\langle M \rangle$ höchstens die Dimension 4, also sind mehr als vier Elemente aus $\langle M \rangle$ stets linear abhängig. Insbesondere sind v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 linear abhängig.

Aufgabe 4

Sei $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Dimension von U

b) Gib Unterräume $W, W' \subseteq \mathbb{Q}^4$ an (durch Angabe von Basen von W und W'), so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

i) U und W sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,
ii) U und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,
iii) W und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$.

(Zur Lösung gehört der Nachweis, daß W und W' tatsächlich die Bedingungen i)–iii) erfüllen.)

Wir schreiben u_1, u_2, u_3 als Spalten in eine Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Dann ist U das Erzeugnis der Spaltenvektoren von A. Dieses ändert sich nicht, wenn wir das Vierfache der ersten Spalte von der zweiten Spalte und das Zweifache der ersten Spalte von der dritten Spalte abziehen. Man erhält die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus sehen wir, daß u_3 im Erzeugnis von u_1 und u_2 liegt. Also ist U das Erzeugnis der Spaltenvektoren von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und dies ist dasselbe wie das Erzeugnis der Spaltenvektoren von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus sieht man, daß U die Dimension 2 hat, und daß u_1, u_2 eine Basis von U ist. Weiter sehen wir aus dieser Matrix, daß u_1, u_2 zusammen mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{Q}^4$ erzeugen.

Da e_1 und e_4 offenbar linear unabhängig sind, folgt, daß e_1, e_4 eine Basis von $W := \langle e_1, e_4 \rangle$ bilden und W tatsächlich ein Komplementärraum zu U ist. (Da U und W zweidimensional sind und $U + W$ vierdimensional, folgt, daß $U \cap W = \{0\}$.) Sei nun $v_1 := u_1 + e_1$ und $v_2 := u_2 + e_4$. Sei $W' = \langle v_1, v_2 \rangle$. Offenbar ist $U + W = U + W'$. Da W' höchstens zweidimensional als Erzeugnis zweier Vektoren ist, folgt wegen $\dim U = 2$ weiter, daß $\dim W' = 2$ (insbesondere ist v_1, v_2 eine Basis von W') und $\dim U \cap W' = 0$, also $U \cap W' = \{0\}$. Damit ist auch W' ein Koplementärraum zu U. Es ist $W + W' = \langle e_1, e_4, u_1 + e_1, u_2 + e_4 \rangle = \langle u_1, u_2, e_1, e_4 \rangle = \mathbb{Q}^4$, s.o. Weiter ist wegen $\dim W = \dim W' = 2$ und $\dim W + W' = 4$ der Durchschnittt $\dim W \cap W'$ nulldimensional, also $W \cap W' = \{0\}$, also sind W und W' Komplementärräume.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ferner sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeige: Ist $f \circ f = 0 \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, so gilt $\dim \ker f \geq \frac{1}{2} \dim V$.

b) Gilt auch die Umkehrung von a)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

a) Aus $f^2 = 0$ folgt $\mathrm{im}\, f \subseteq \ker f$. Insbesondere also $\dim \mathrm{im}\, f \leq \dim \ker f$. Wegen $\dim V = \dim \mathrm{im}\, f + \dim \ker f$ folgt weiter $\dim V \leq 2 \dim \ker f$, also $\dim \ker f \geq \frac{1}{2} \dim V$.

b) Die Umkehrung ist falsch. Sei beispielsweise $V = \mathbb{Q}^2$, sei f bezüglich der Standardbasis gegeben durch $f(e_1) = e_1$ und $f(e_2) = 0$. Dann ist offenbar $\ker f = \langle e_2 \rangle$, also $\dim \ker f = 1 = \frac{1}{2} \dim V$. Aber $f^2 = f \neq 0$.

Aufgabe 6

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n, und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m < n$. Beweise: Es gibt genau dann einen Unterraum U der Dimension m von V mit $f(U) \subseteq U$, wenn es eine Basis $\mathfrak{B}$ von V gibt, so daß $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ von der Form

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ist, wobei A die Größe $m \times m$ hat, B die Größe $m \times (n-m)$ hat, C die Größe $(n-m) \times (n-m)$ hat und die 0 für die Nullmatrix der Größe $(n-m) \times m$ steht.

Angenommen, $\mathfrak{B} = b_1, ...b_m, b_{m+1}, ..., b_n$ ist eine Basis, so daß $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ die angegebene Form hat. Dann folgt $f(b_1), ..., f(b_m) \in \langle b_1, ..., b_m \rangle$. Daraus folgt $f(\langle b_1, ..., b_m \rangle) \subseteq \langle b_1, ..., b_m \rangle$. Der Unterraum $U := \langle b_1, ..., b_m \rangle$ leistet also das Gewünschte.

Sei umgekehrt U ein Unterraum der Dimension m von V mit $f(U) \subseteq U$. Sei $b_1, ..., b_m$ eine Basis von U. Nach dem Basisergänzungssatz können wir $b_1, ..., b_m$ zu einer Basis $\mathfrak{B} = b_1, ..., b_m, b_{m+1}, ..., b_n$ von V ergänzen. Wegen $f(U) \subseteq U$ ist $f(b_i) \in U = \langle b_1, ..., b_m \rangle$ für $i \leq m$. Daraus folgt, daß $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ die angegebene Form hat.