Dr. U. Terstiege **Wintersemester 2012/13**

Riemannsche Flächen

13. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 29. Januar 2013 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ und sei ω eine holomorphe 1-Form auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, ..., a_n, \infty\}$. Sei $R \in \mathbb{R}$ größer als alle $|a_i|$ und sei $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\alpha(t) = R \cdot e^{2\pi i t}$. Zeige, daß

$$\int_\alpha \omega = -2\pi i \cdot \mathrm{Res}_\infty(\omega).$$

Aufgabe 2

Nutze den Residuensatz um zu zeigen, daß jede meromorphe, nicht konstante Funktion f auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit Vielfachheiten gezählt ebenso viele Pole wie Nullstellen hat.

Aufgabe 3

Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, und sei $X = \mathbb{C}/\Gamma$ mit der natürlichen Struktur als Riemannsche Fläche. Zeige, daß $\Omega(X)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum die Dimension 1 hat.