Dr. U. Terstiege **Wintersemester 2012/13**

Riemannsche Flächen

3. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 6. November 2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, d.h. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ versehen mit der Teilraumtopologie. Zeige, daß die stereographische Projektion $\sigma : S^2 \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{1-z}, & \text{falls } z \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } z = 1 \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2

Sei X eine Riemannsche Fläche und $f : X \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Zeige, daß der Realteil $\mathrm{Re}(f)$ von f kein Maximum annimmt.

Aufgabe 3

Seien $r < R$ positive reelle Zahlen. Wir betrachten die folgenden drei Gebiete in $\mathbb{C}$: Sei $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$, sei $D^\times = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, und sei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Als offene und zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ tragen sie jeweils in natürlicher Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche. Zeige, daß diese drei Gebiete zwar als topologische Räume paarweise zueinander homöomorph sind, daß sie als Riemannsche Flächen jedoch paarweise nicht isomorph zueinander sind.