Lineare Algebra I — Probeklausur

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

a) Definiere, wann eine Familie $v_1, ..., v_m$ von Elementen aus V linear unabhängig ist.

b) Definiere, wann eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & (1+a)x_2 & + & x_3 & = & 1+a \\ (a-1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ (a+1)x_1 & + & (1+2a)x_2 & + & x_3 & = & 1+2a \end{array}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V$. Seien $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$. Zeige, daß die Elemente v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 linear abhängig sind.

Aufgabe 4 (5+9 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Dimension von U.

b) Gib Unterräume $W, W' \subseteq \mathbb{Q}^4$ an (durch Angabe von Basen von W und W'), so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

i) U und W sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,
ii) U und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,
iii) W und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$.

(Zur Lösung gehört der Nachweis, daß W und W' tatsächlich die Bedingungen i)–iii) erfüllen.)

Aufgabe 5 (6+4 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Weiter sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeige: Ist $f \circ f = 0 \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, so gilt $\dim \ker f \geq \frac{1}{2} \dim V$.

b) Gilt auch die Umkehrung von a)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

bitte wenden

Aufgabe 6 (4+4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n, und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m < n$. Beweise: Es gibt genau dann einen Unterraum U der Dimension m von V mit $f(U) \subseteq U$, wenn es eine Basis $\mathfrak{B}$ von V gibt, so daß $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ von der Form

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ist, wobei A die Größe $m \times m$ hat, B die Größe $m \times (n-m)$ hat, C die Größe $(n-m) \times (n-m)$ hat und die 0 für die Nullmatrix der Größe $(n-m) \times m$ steht.