Schülerinfotag

1. Man zeige, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Das heißt $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als $\frac{p}{q}$ schreiben, wobei p und q ganze Zahlen sind.

   Proof. Wir werden das Prinzip Beweis durch Widerspruch verwenden. Hierbei nehmen wir an, dass das Gegenteil der zu zeigenden Aussage gelten würde und formulieren einen Widerspruch. Das Gegenteil der zu zeigenden Aussage ist dann falsch, also muss unsere eigentliche Aussage richtig sein. Dieses Konzept der Beweisführung findet in der Mathematik häufig Anwendung.

   Nehmen wir also an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sei. Somit finden wir eine Darsetllung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind. Außerdem können wir annehmen, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ soweit wie möglich gekürzt ist. Sollte dies nicht der Fall sein, kürzen wir einfach soweit wie möglich. Diese Annahme werden wir zu einem Widerspruch führen, denn

   $$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ \Leftrightarrow 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ \Leftrightarrow 2q^2 &= p^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

   Aufgrund von (1) erkennen wir sofort, dass p^2 eine gerade Zahl sein muss, da beide Seiten durch 2 teilbar sind. Ist nun p^2 gerade, so muss auch p eine gerade Zahl sein, da Multiplikation zweier ungerader Zahlen, wieder eine ungerade Zahl ergibt (hier könnte man einen weiteren Widerspruchsbeweis führen). Also ist p von der Form $p = 2n$ für eine ganze Zahl n . Setzen wir dieses Resultat in (1) ein, so erhalten wir:

   $$\begin{aligned} 2q^2 &= p^2 \\ \Leftrightarrow 2q^2 &= (2n)^2 \\ \Leftrightarrow 2q^2 &= 4n^2 \\ \Leftrightarrow q^2 &= 2n^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

   und aus (2) erkennt man, dass auch q^2 und nach dem Aurgument von oben auch q eine gerade Zahl ist. Dies ist ein Widerspruch zur unserer Annahme, dass beide Zahlen teilerfremd waren, da nun beide Zahlen durch 2 teilbar sind. Also kann es keinen gekürzten Bruch geben, der $\sqrt{2}$ darstellt. $\sqrt{2}$ ist also irrational. □

2. Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

   Proof. Um diese Aussage zu beweisen, wollen wir annehmen, dass sie falsch ist und diese Annahme zum Widerspruch führen. Diese Beweistechnik nennt man Widerspruchsbeweis. Da die Aussage ist, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, nehmen wir also an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. In diesem Fall können wir die Primzahlen zählen. Sei n die Anzahl aller Primzahlen, die es gibt. Können wir nun zeigen, dass es dann mindestens eine weitere Primzahl geben muss, dass also mindestens $n + 1$ Primzahlen existieren, so muss unsere Annahme falsch sein. Die Primzahlen nennen wir

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n.$$

Wir bilden nun das Produkt dieser Primzahlen, addieren 1 hinzu und nennen die erhaltene Zahl A, also

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Aus der Schule ist bekannt, dass man jede natürliche Zahl - also auch A - in Primfaktoren zerlegen kann. Jedoch kann A keinen der Primfaktoren $p_1, \ldots, p_n$ haben. Würde zum Beispiel p_1 die Zahl A teilen, so könnte man schreiben $A = p_1 \cdot l_1$. Dabei ist l_1 die natürliche Zahl $\frac{A}{p_1}$. Dann würde jedoch gelten

$$\begin{aligned} A &= p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \\ \Leftrightarrow A - p_1 \cdot \ldots \cdot p_n &= 1 \\ \Leftrightarrow p_1 \cdot l_1 - p_1 \cdot \ldots \cdot p_n &= 1 \\ \Leftrightarrow p_1(l_1 - p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) &= 1. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $l_1 - p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ eine ganze Zahl ist. Es gibt jedoch keine ganze Zahl, die multipliziert mit einer Primzahl Eins ergibt. Also kann p_1 die Zahl A nicht teilen. Wendet man dieses Verfahren auch für $p_2, \ldots, p_n$ an, so erhält man für diese das gleiche Resultat. Daher muss A mindestens einen neuen Primteiler besitzen, den wir p_{n+1} nennen. Auf diese Weise können wir immer neue Primzahlen erzeugen, es muss also unendlich viele geben. Wir wollen ein kleines Beispiel dazu rechnen und beginnen mit den Primzahlen $2, 3$ und 5:

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31.$$

Wir wissen, dass 31 ebenfalls eine Primzahl ist. Es gilt dann weiter:

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 + 1 = 931 = 7 \cdot 7 \cdot 19.$$

Damit haben wir die 7 und 19 als neue Primzahlen gefunden. So können wir beliebig neue Primzahlen erzeugen. □

3. Man zeige, dass eine vierstellige ganze Zahl genau dann durch 3 (oder 9) teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 (oder 9) teilbar ist.

Proof. Sei S eine vierstellige Zahl, also eine Zahl bestehend aus den vier Ziffern a_1, a_2, a_3, a_4. Wir können S also schreiben als $S = 1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4$. Die Quersumme von S wollen wir mit $Q(S)$ bezeichnen, also $Q(S) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Wir müssen nun sogar zwei Aussagen zeigen, nämlich einmal dass wenn 3 ein Teiler von S ist, so auch von $Q(S)$ und andererseits die umgekehrte Richtung, dass wenn 3 ein Teiler von $Q(S)$ ist, dann auch von S.

Nehmen wir zuerst an, dass 3 ein Teiler von $Q(S)$ ist. Dann ist also die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ durch 3 teilbar. Nun schauen wir uns die Zahl S genauer an:

$$\begin{aligned} S &= 1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 \\ &= 999a_1 + a_1 + 99a_2 + a_2 + 9a_3 + a_3 + a_4 \\ &= 999a_1 + 99a_2 + 9a_3 + \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{=Q(S)} \qquad (3) \end{aligned}$$

In (3) finden wir nun $Q(S)$ wieder, wissen also, dass die Summe der letzen vier Terme nach Vorraussetzung durch 3 teilbar ist. Offensichtlich ist auch $999a_1 + 99a_2 + 9a_3 = 3 \cdot (333a_1 + 33a_2 + 3a_3)$ durch 3 teilbar und somit auch die gesamte Summe, also unsere Zahl S.

Für die Rückrichtung gehen wir ähnlich vor: Wir nehmen nun an, dass die Zahl S durch 3 teilbar ist und wollen nun, überprüfen ob auch $Q(S)$ durch 3 teilbar ist. Wie oben betrachten wir S und erhalten:

$$\begin{aligned} S &= 1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 \\ &= 999a_1 + a_1 + 99a_2 + a_2 + 9a_3 + a_3 + a_4 \\ &= 999a_1 + 99a_2 + 9a_3 + \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{=Q(S)} \\ &= 999a_1 + 99a_2 + 9a_3 + Q(S) \\ \Longleftrightarrow S - (999a_1 + 99a_2 + 9a_3) &= Q(S), \qquad (4) \end{aligned}$$

wobei S nach Vorraussetzung und $(999a_1 + 99a_2 + 9a_3)$ wie oben durch 3 teilbar ist. Insgesamt ist also die Differenz auf der linken Seite in (4) und also auch die rechte Seite also $Q(S)$ durch 3 teilbar. Die Aussage für die Teilbarkeit durch 9 zeigt man analog □

4. Man beweise die folgende Aussage:
Für alle reellen Zahlen a und b gilt: $|a + b| \leq |a| + |b|$.
Zur Erinnerung: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
Diese Ungleichung heißt in der Mathematik "Dreiecksungleichung" und besagt anschaulich, dass eine Dreiecksseite höchstens so lang wie die Summe der beiden anderen Seiten ist. Was bedeutet in diesem Satz die Formulierung "höchstens"?

Proof. Wir benutzen die Tatsache, dass das Quadrat einer Zahl immer größer als oder gleich null ist. Das heißt für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geq 0$ und damit $x^2 = |x|^2$. Betrachten wir nun die Dreiecksungleichung.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

und quadrieren beide Seiten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
(|a+b|)^2 &\leq (|a|+|b|)^2 \\
\Longleftrightarrow (a+b)^2 &\leq |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \qquad (5)\\
\Longleftrightarrow a^2+2ab+b^2 &\leq |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \\
\Longleftrightarrow 2ab &\leq 2|a||b| \\
\Longleftrightarrow ab &\leq |a||b|. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir in (5) unsere Überlegung von oben aus. Die letzte Ungleichung ist sicher immer richtig, da sich das Produkt nur durch ein Vorzeichen unterscheiden kann und rechts immer ein positiver Wert steht. □

5. Bereits in der Grundschule lernt man die Division mit Rest kennen. Hierbei ist der Rest immer eine positive Zahl kleiner als der Divisor, oder null, wenn die Divison aufgeht. Beispielsweise gilt:

$$47 : 5 = 9 \text{ Rest } 2, \text{ also } 47 = 9 \cdot 5 + 2.$$

Seien a, b und c ganze Zahlen. Wir dividieren beide Zahlen mit Rest durch c und bezeichnen die entstehenden Reste mit r_1 und r_2. Es gibt also eindeutig bestimmte natürliche Zahlen n und m, so dass gilt:

(a) $a = n \cdot c + r_1$

(b) $b = m \cdot c + r_2$.

Wir wollen die folgende Aussage zeigen:
Multiplizieren wir a und b und dividieren anschließend das Produkt mit Rest durch c, so erhalten wir als Rest das Produkt $r_1 \cdot r_2$. Achtung, hierbei müssen wir eventuell erneut den Rest berechnen, sollte $r_1 \cdot r_2 \geq c$ sein. Es spielt also keine Rolle, ob wir erst a und b miteinander multiplizieren und dann mit Rest durch c teilen oder a und b teilen und dann die Reste multiplizieren (und ggf. erneut den Rest nehmen).

Proof. Um diese Aussage zu beweisen, bilden wir zunächst das Produk $a \cdot b$. Es gilt

$$\begin{aligned}
a \cdot b = (n \cdot c + r_1) \cdot (m \cdot c + r_2) &= (n \cdot m \cdot c + n \cdot r_2 + m \cdot r_1) \cdot c + r_1 \cdot r_2 \\
\Leftrightarrow a \cdot b - r_1 \cdot r_2 &= (n \cdot m \cdot c + n \cdot r_2 + m \cdot r_1) \cdot c.
\end{aligned}$$

Offensichtlich teilt c die rechte Seite der unteren Gleichung, also teilt c auch die linke Seite. Das bedeutet, dass $a \cdot b$ und $r_1 \cdot r_2$ bei der Division durch c den gleichen Rest haben, denn sonst würde dieser bei der Subtraktion nicht zu Null werden. Das ist genau das, was wir zeigen wollten, denn das bedeutet, dass es egal ist, ob wir den Rest des Poduktes $a \cdot b$ bilden, oder die Reste r_1 und r_2 miteinander multiplizieren. □

6. Wir wollen nun Aufgabe 5. anwenden, um die folgende Aussage zu beweisen: Für jede natürlich Zahl n ist $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ durch neun teilbar.

Proof. Wir wollen nun zeigen, dass die Aussage auch für die Addition von a und b gilt. Schreiben wir

$$\begin{aligned} a + b = (n \cdot c + r_1) + (m \cdot c + r_2) &= (n + m) \cdot c + (r_1 + r_2) \\ \Leftrightarrow (a + b) - (r_1 + r_2) &= (n + m) \cdot c. \end{aligned}$$

Wie oben sehen wir, dass c die rechte - und somit auch die linke - Seite der Gleichung teilt. Daher haben $a + b$ und $r_1 + r_2$ bei der Division durch c den gleichen Rest und die Aussage ist gezeigt.

Diese Aussage wollen wir unter Zuhilfenahme von Aufgabe 5 zeigen, indem wir einfach die Reste der einzelnen Summanden bilden und diese dann addieren. Betrachten wir zunächst 10^n. Dies ist eine Zahl mit n Nullen, also

$$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ Mal}} = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ Mal}} + 1.$$

Die Quersumme der Zahl $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ Mal}}$ ist $9 \cdot n$ und damit ist diese Zahl nach Aufgabe 3 durch 9 teilbar. Der Rest von 10^n bei der Division durch 9 ist also 1 und das gilt sogar für alle natürlichen Zahlen n, wie wir gezeigt haben. Betrachten wir nun den zweiten Summanden. Wie man leicht nachrechnet, ist $3 \cdot 4 = 12$ und die Zahl 12 hat bei der Division durch 9 wieder den Rest 3. Also hat auch $3 \cdot 4 \cdot 4$ wieder den Rest 3 bei der Division durch 9, denn wir können ja zunächst den Rest von $3 \cdot 4$ bilden und diesen dann mit 4 multiplizieren. Dabei kommt, wie oben gesehen, wieder 12 heraus. Dieses Verfahren lässt sich nun beliebig oft wiederholen und wir erkennen, dass $3 \cdot 4^{n+2}$ für alle natürlichen Zahlen n bei der Division durch 9 den Rest 3 hat. Da der dritte Summand nicht von n abhängt und konstant 5 ist, ist der Rest dieses Summanden natürlich 5. Addieren wir nun die erhaltenen Reste, so bekommen wir den Rest von $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ bei der Division durch 9. Die Addition der Reste beträgt

$$1 + 3 + 5 = 9.$$

Da 9 natürlich durch 9 teilbar ist, hat 9 den Rest 0. Somit ist die Zahl also durch 9 teilbar und wir haben die Aussage gezeigt. □

7. Mit Hilfe der aus der Schule bekannten trigonometrischen Funktionen beweise man durch Integration, dass der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius 1 gerade π ist. Kann man diesen Sonderfall für einen beliebigen Radius r verallgemeinern, also zeigen, dass der Flächeninhalt eines beliebigen Kreises mit Radius r gerade πr^2 ist?

Proof. Wir betrachten einen Kreis mit dem Radius r. Wir stellen uns vor, wir würden diesen in ein Koordinatensystem einzeichnen. Wir nehmen 0 als Mittelpunkt, erhalten also in jedem Quadranten einen Viertelkreis. Wir betrachten nur den Quadranten, in dem alle Zaheln positiv sind (oben rechts), diesen nennen wir den ersten Quadranten. Können wir nun die

Fläche unterhalb des dortigen Viertelkreises bestimmen, so erhalten wir nach Multiplikation mit 4 den Flächeninhalt unseres Kreises.

Aus der Schule ist die Kreisgleichung bekannt. Ein Kreis mit dem Radius r besitzt die folgende Darstellung: $x^2 + y^2 = r^2$. Da wir nur den ersten Quadranten betrachten wollen, können wir diese Gleichung nach y auflösen und erhalten $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Wir müssen also das folgende Integral berechnen, um den Flächeninhalt des Viertelkreises zu erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \int_0^r \sqrt{r^2(1 - \frac{x^2}{r^2})}dx \\
&= \int_0^r r \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}dx \\
&= r \cdot \int_0^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}dx \qquad (7)
\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Substitutionsregel an. Wir setzen:

$$\sin u := \frac{x}{r}$$

und erhalten also:

$$x = r \cdot \sin u$$

und damit:

$$\frac{dx}{du} = r \cdot \cos u$$

Setzen wir dies in (7) ein und beachten, dass wir die Grenzen anpassen müssen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
r \cdot \int_0^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}dx &= r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sqrt{1 - \sin^2 u})r \cdot \cos u]\ du \\
&= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\ du
\end{aligned}$$

Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns nur auf das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\ du$, welches wir am Ende einfach mit r^2 multiplizieren. Dieses Integral können wir partiell integrieren. Hierzu setzen wir $U := \cos u$ mit $U' = -\sin u$ und $V' := \cos u$ mit $V = \sin u$. Dann können wir gemäß der bekannten Formel

$$\int UV' = UV - \int U'V$$

integrieren. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos^2 u\ du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \cos u\ du \\
&= \cos u \sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 u\ du \\
&= \cos u \sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\ du.
\end{aligned}$$

Nun benutzen wir noch die bekannte Tatsache, dass $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ist und schreiben den hinteren Teil der letzen Gleichung um:

$$\begin{aligned} \cos u \sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \; du &= \cos u \sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2 u \; du \\ &= \cos u \sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du &= \cos u \sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du \\ &= 0 + u]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du \end{aligned}$$

Addieren wir nun $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du$ auf beiden Seiten und werten die rechte Seite aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du &= \frac{\pi}{2} \\ \Longleftrightarrow \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \; du &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Multplizieren wir dieses Ergebnis noch mit r^2 so erhalten wir als Flächeninhalt für unseren Viertelkreis $\frac{\pi}{4} r^2$ und somit den bekannten Flächeninhalt für einen ganzen Kreis. □